

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

## ΕΠΑ.Λ. (ΟΜΑΔΑ Β')

2009

### ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

#### ΘΕΜΑ 1ο

- A.** Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα  $A$  και  $B$  ισχύει ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**Μονάδες 10**

- B.** Αν  $x_1, x_2, \dots, x_k$  είναι οι τιμές μιας μεταβλητής  $X$  που αφορά τα άτομα ενός δείγματος μεγέθους  $n$  ( $k \leq n$ ), να ορίσετε τη σχετική συχνότητα  $f_i$  της τιμής  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ .

**Μονάδες 5**

- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- α.** Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων  $f, g$  ισχύει ότι

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x)$$

**Μονάδες 2**

- β.** Αν  $A, B$  είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου  $\Omega$ , τότε ισχύει ότι

$$A - B = A \cap B'$$

**Μονάδες 2**

- γ.** Για τη συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu x$  ισχύει ότι

$$(\eta\mu x)' = -\sigma\upsilon\nu x$$

**Μονάδες 2**

- δ.** Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποιοτικής μεταβλητής.

**Μονάδες 2**

- ε.** Η μέση τιμή ενός συνόλου  $n$  παρατηρήσεων είναι ένα μέτρο θέσης.

**Μονάδες 2**

#### ΘΕΜΑ 2ο

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  μιας μεταβλητής  $X$  με αντίστοιχες συχνότητες  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Η συχνότητα  $v_2$  που αντιστοιχεί στην τιμή  $x_2 = 3$  είναι άγνωστη. Δίνεται ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι ίση με  $\bar{x} = 4$ .

$x_i$	$v_i$
2	6
3	;
5	3
8	4

- α. Να αποδείξετε ότι  $v_2 = 7$ . **Μονάδες 9**
- β. Να αποδείξετε ότι η διακύμανση των παρατηρήσεων είναι ίση με 4,9. **Μονάδες 9**
- γ. Να εξετάσετε αν το δείγμα των τιμών της μεταβλητής  $X$  είναι ομοιογενές.  
Δίνεται ότι  $\sqrt{4,9} \approx 2,2$ . **Μονάδες 7**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax - 7$ , όπου  $a$  πραγματικός αριθμός, για την οποία ισχύει

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

- α. Να δείξετε ότι  $a = 9$  **Μονάδες 7**
- β. Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1}$ . **Μονάδες 8**
- γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $f$ , η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -3x$ . **Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln x - \frac{x}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2$ ,  $x > 0$  όπου  $\lambda$  ένας πραγματικός αριθμός.

- A.
- α. Να προσδιοριστεί το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και το διάστημα στο οποίο η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα. **Μονάδες 6**
- β. Να μελετηθεί η συνάρτηση  $f$  ως προς τα ακρότατα. **Μονάδες 6**

**B.** Θεωρούμε ότι οι τιμές της συνάρτησης  $f(2), f(4), f(8), f(3)$  και  $f(5)$  είναι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής  $X$ .

**α.** Αν  $R$  είναι το εύρος και  $\delta$  η διάμεσος των παρατηρήσεων, ναδειχθεί ότι

$$R = 3 + \ln \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \delta = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$$

**Μονάδες 7**

**β.** Έστω ο δειγματικός χώρος  $\Omega = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$  ο οποίος αποτελείται από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα. Αν το  $\lambda$  παίρνει τιμές στο δειγματικό χώρο  $\Omega$ , να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$$A = \{\lambda \in \Omega \mid R + \delta < -2\}$$

**Μονάδες 6**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία σελίδα 150 σχολ. βιβλίο.

B. Θεωρία, σελίδα 65 σχολ. βιβλίο.

Γ.  $\alpha \rightarrow \Lambda$ ,  $\beta \rightarrow \Sigma$ ,  $\gamma \rightarrow \Lambda$ ,  $\delta \rightarrow \Sigma$ ,  $\varepsilon \rightarrow \Sigma$

### ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^4 v_i x_i / v \Rightarrow \bar{x} = \frac{v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4}{v} \Rightarrow 4 = \frac{2 \cdot 6 + 3 \cdot v_2 + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{6 + v_2 + 3 + 4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4 = \frac{12 + 3v_2 + 15 + 32}{13 + v_2} \Leftrightarrow 4(13 + v_2) = 59 + 3v_2 \Leftrightarrow 52 + 4v_2 = 59 + 3v_2 \Leftrightarrow v_2 = 7.$$

β) Είναι

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 v_i (x_i - \bar{x})^2}{v} = \frac{v_1 (x_1 - \bar{x})^2 + v_2 (x_2 - \bar{x})^2 + v_3 (x_3 - \bar{x})^2 + v_4 (x_4 - \bar{x})^2}{v} =$$
$$= \frac{6(2-4)^2 + 7(3-4)^2 + 3(5-4)^2 + 4(8-4)^2}{6+7+3+4} = \frac{6 \cdot 4 + 7 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 16}{20} =$$
$$= \frac{24 + 7 + 3 + 64}{20} = \frac{98}{20} = 4,9.$$

γ) Είναι  $CV = \frac{S}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{S^2}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{4,9}}{4} \approx \frac{2,2}{4} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20} = 55\% > 10\%$ ,

άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

### ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι  $A_f = \mathbb{R}$ .

Η  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  ως πολυωνυμική.

Είναι:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + \alpha,$$

$$f''(x) = 6x - 12.$$

Έτσι:

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + \alpha + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 12x - 24 - 12x + \alpha + 15 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 9.$$

β) Είναι για  $x \neq \pm 1$ :

$$\frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \frac{3x-9}{x+1}.$$

$$\text{Οπότε: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-9}{x+1} = \frac{-6}{2} = -3.$$

γ) Έστω  $A(x_0, f(x_0))$  το σημείο επαφής.

Επειδή η εφαπτομένη στο  $A$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = -3x$

$$\Rightarrow \lambda_{\text{εφ}} = -3 \Rightarrow f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow$$

$$3x_0^2 - 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2.$$

Άρα το σημείο επαφής είναι το  $A(2, f(2))$ .

Όμως  $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = -5$  οπότε το σημείο επαφής είναι  $A(2, -5)$ .

Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:  $y = f'(2)x + \beta$ , δηλ.  $y = -3x + \beta$ .

Όμως  $A$  ανήκει στην εφαπτομένη  $\Rightarrow -5 = -3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$ .

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:  $y = -3x + 1$ .

### ΘΕΜΑ 4ο

**A. α.** Είναι  $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x} = -\frac{x-2}{2x}$ .

Με  $x > 0$  είναι:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Έτσι η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(0,2]$  και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[2, +\infty)$ .

**β.** Η  $f$  παρουσιάζει μέγιστη τιμή:

$$f(2) = \ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1.$$

**B. α.** Επειδή η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[2, +\infty)$  είναι:

$$2 < 3 < 4 < 5 < 8 \Rightarrow f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8).$$

Έτσι προκύπτει ότι το εύρος είναι:

$$\begin{aligned} R &= f(2) - f(8) = (\ln 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 1) - (\ln 8 - 4 + \lambda^2 - 6\lambda + 2) = \\ &= \ln 2 - \ln 8 + 3 = \ln \frac{1}{4} + 3. \end{aligned}$$

Επίσης, η διάμεσος προκύπτει ότι είναι:

$$f(4) = \ln 4 - 2 + \lambda^2 - 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda.$$

**β.** Είναι  $A = \left\{ \lambda \in \Omega \mid 3 + \ln \frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \right\} =$   
 $= \left\{ \lambda \in \Omega \mid \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \right\}.$

Επειδή  $\lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow \lambda \in (1, 5)$ , με  $\lambda \in \Omega$  είναι

$$A = \{2, 3, 4\}. \text{ Έτσι } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{100}.$$