Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ιδιότητες Δυνάμεων

$\alpha^0 = 1$ $\qquad$ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \frac{\alpha^\nu}{\beta^\nu}$

$\alpha^1 = \alpha$

$\alpha^\nu \cdot \alpha^\mu = \alpha^{\nu+\mu}$

$\frac{\alpha^\nu}{\alpha^\mu} = \alpha^{\nu-\mu}$ $\qquad$ $\alpha^{-\nu} = \frac{1}{\alpha^\nu}$

$\left(\alpha^\nu\right)^\mu = \alpha^{\nu\cdot\mu}$ $\qquad$ $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^\nu = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{-\nu}$

$(\alpha\cdot\beta)^\nu = \alpha^\nu \cdot \beta^\nu$

Ιδιότητες Ριζών

αν $\alpha > 0$ τότε $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$

$\sqrt{\alpha\cdot\beta} = \sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$

$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$

Διάταξη και πράξεις

- αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$.
- αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha + \gamma > \beta + \delta$.
- αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > 0$ τότε $\alpha\gamma > \beta\gamma$.
- αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$ τότε $\alpha\gamma < \beta\gamma$.

Ταυτότητες

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$

$(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

$(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$

$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)\left(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2\right)$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$

Επίλυση της αx²+βx+γ=0 (Ι) με Δ=β²-4αγ

• αν $\Delta>0$ η (1) έχει ρίζες τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

• αν $\Delta=0$ η (1) έχει διπλή ρίζα την $x_0=\dfrac{-\beta}{2\alpha}$.

• αν $\Delta<0$ η (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Ειδικές περιπτώσεις

1) Αν λείπει το β (δηλ. β=0) τότε: χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, διαιρώ με τον συντελεστή του αγνώστου και έχω την μορφή: $x^2=\mu\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\mu}$

2) Αν λείπει το γ (δηλ. γ=0) τότε: βγάζω κοινό παράγοντα το χ και έχω την μορφή:

$x\cdot\left(\alpha x+\beta\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $\alpha x+\beta=0$ (και λύνω ως προς x).

Παραγοντοποίηση της αx²+βx+γ (ΙΙ)

Αν η **(ΙΙ)=0** έχει:

• ρίζες τις x_1,x_2 τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$.

• διπλή ρίζα την x_0 τότε $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2$.

Η συνάρτηση ψ=αx

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
Αν γνωρίζω ένα σημείο Μ (x, ψ) το οποίο ανήκει στην ευθεία, μπορώ να υπολογίσω το α από τον τύπο: $\alpha=\dfrac{\psi}{x}$.

Η συνάρτηση ψ=αx±β

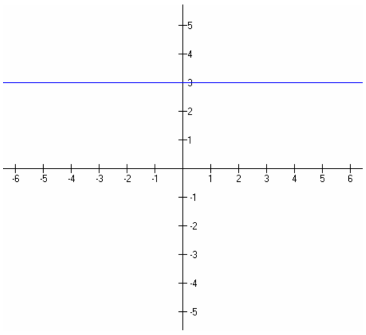
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης αυτής είναι ευθεία παράλληλη προς την ευθεία $\psi=\alpha x$.

Ειδικές περιπτώσεις

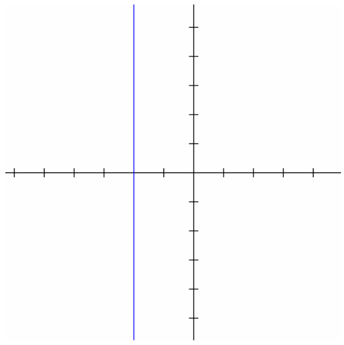
Α) Η ευθεία $y=a$ η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα χ΄χ.

B) Η ευθεία $x=\beta$ η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα ψ΄ψ.

π.χ. $y=3$



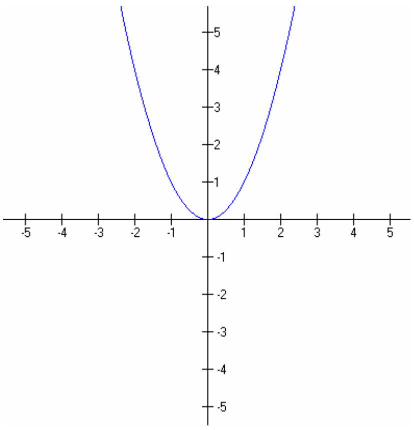
π.χ. $x=-2$



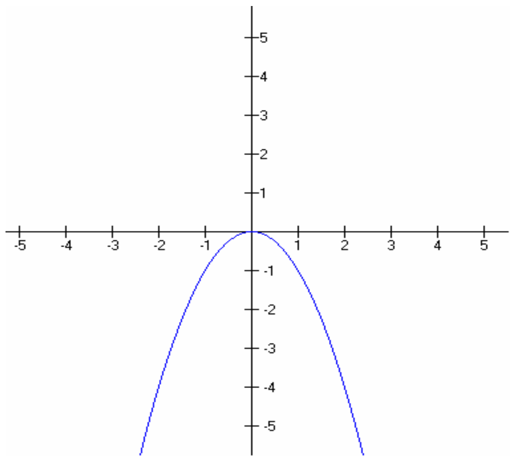
Η συνάρτηση ψ=αx^2

Η συνάρτηση αυτή παριστάνει **παραβολή**.

A) Αν $\alpha \succ 0$ τότε:
Βρίσκεται <u>πάνω</u> από τον άξονα χ΄χ.
Έχει <u>ελάχιστο</u> το σημείο O(0,0).
Έχει άξονα συμμετρίας τον ψ΄ψ.



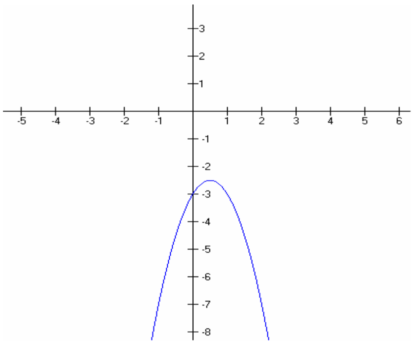
B) Αν $\alpha \prec 0$ τότε:
Βρίσκεται <u>κάτω</u> από τον άξονα χ΄χ
Έχει <u>μέγιστο</u> το σημείο 0(0,0).
Έχει άξονα συμμετρίας τον ψ΄ψ.



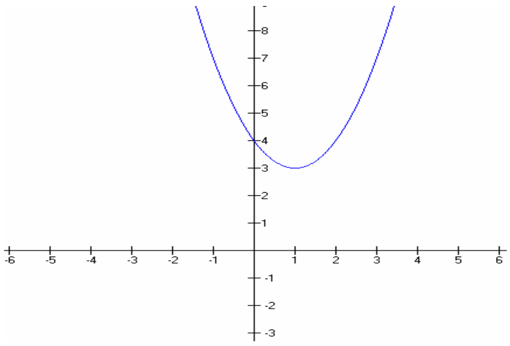
Η συνάρτηση ψ=αx^2+βx+γ

Η συνάρτηση αυτή παριστάνει παραβολή με κορυφή (μέγιστο αν $\alpha<0$ και ελάχιστο αν $\alpha>0$) το σημείο K($\frac{-\beta}{2\alpha}$, $\frac{-\Delta}{4\alpha}$) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=\frac{-\beta}{2\alpha}$.

π.χ. $\alpha < 0$



π.χ. $\alpha > 0$

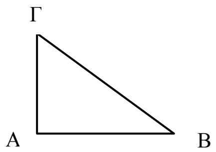


Τριγωνομετρία

$$\eta\mu\hat{B} = \frac{\text{απεναντι καθετη}}{\text{υποτεινουσα}} \Rightarrow \eta\mu\hat{B} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\text{προσκειμενη καθετη}}{\text{υποτεινουσα}} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\hat{B} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}$$

$$\varepsilon\phi\hat{B} = \frac{\text{απεναντι καθετη}}{\text{προσκειμενη καθετη}} \Rightarrow \varepsilon\phi\hat{B} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}}$$



Έστω ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $x\mathrm{O}y$ σημείο $\mathrm{M}(x, y)$ και ω η γωνία που σχηματίζεται όταν περιστρέφεται ο άξονας $\mathrm{O}x$ κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει στην ευθεία OM.
Τότε:

$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$, $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$, $\varepsilon\phi\omega = \frac{y}{x}$ όπου $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$

$-1 \le \eta\mu\omega \le 1$ $\qquad$ $-1 \le \sigma\upsilon\nu\omega \le 1$

- αν $0^o < \omega < 90^o$ τότε $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, $\varepsilon\phi\omega > 0$.
- αν $90^o < \omega < 180^o$ τότε $\eta\mu\omega > 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, $\varepsilon\phi\omega < 0$.
- αν $180^o < \omega < 270^o$ τότε $\eta\mu\omega < 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$ $\varepsilon\phi\omega > 0$.
- αν $270^o < \omega < 360^o$ τότε $\eta\mu\omega < 0$, $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$, $\varepsilon\phi\omega < 0$.

Συμπληρωματικές και παραπληρωματικές γωνίες

$$\eta\mu\left(90^o - \omega\right) = \sigma\upsilon\nu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu\left(90^o - \omega\right) = \eta\mu\omega$$

$$\eta\mu\left(180^o - \omega\right) = \eta\mu\omega \qquad \sigma\upsilon\nu\left(180^o - \omega\right) = -\sigma\upsilon\nu\omega$$

$$\varepsilon\phi\left(180^o - \omega\right) = -\varepsilon\phi\omega$$

Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$, $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

Νόμος Ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\mathrm{A}} = \frac{\beta}{\eta\mu\mathrm{B}} = \frac{\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

Νόμος Συνημιτόνων

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\cdot\beta\cdot\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{A}}$$
$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\cdot\alpha\cdot\gamma\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\mathrm{B}}$$
$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}$$

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

- όταν οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με τις πλευρές ενός άλλου τριγώνου.
- όταν δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι ίσες μια προς μια με δύο πλευρές ενός άλλου τριγώνου και οι περιεχόμενες στις πλευρές αυτές γωνίες είναι ίσες.
- όταν μια πλευρά ενός τριγώνου είναι ίση με μια πλευρά ενός άλλου τριγώνου και οι προσκείμενες γωνίες των πλευρών αυτών είναι μια προς μια ίσες.

Ίσα τμήματα μεταξύ παραλλήλων

- όταν παράλληλες ευθείες ορίζουν ίσα τμήματα σε μια ευθεία, τότε θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.
- αν από το μέσο μιας πλευράς τριγώνου φέρουμε την παράλληλη προς μια πλευρά του, τότε αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς.
- το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.

Κριτήρια ισότητας ορθογωνίων

- όταν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με μια αντίστοιχη πλευρά και γωνία ενός άλλου.
- όταν οι δύο πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι ίσες με τις αντίστοιχες πλευρές ενός άλλου.

Θεώρημα του Θαλή

- όταν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες, τότε τα τμήματα που ορίζονται στη μια είναι ανάλογα προς τα αντίστοιχα τμήματα της άλλης.

Όμοια τρίγωνα

• όταν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες τότε έχουν και τις αντίστοιχες πλευρές τους ανάλογες δηλαδή είναι όμοια.
• όταν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε έχουν και τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες, δηλαδή είναι όμοια.

Εμβαδά ομοίων σχημάτων

• ο λόγος των εμβαδών δυο ομοίων σχημάτων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Όγκοι ομοίων σχημάτων

• ο λόγος των όγκων δύο ομοίων στερεών είναι ίσος με τον κύβο του λόγου ομοιότητας.

Μαθηματικά

Προετοιμασία για τις προαγωγικές εξετάσεις:

- Η μελέτη των μαθηματικών απαιτεί αρχικά **ουσιαστική γνώση** της θεωρίας και στη συνέχεια τη **σωστή εφαρμογή** της στην επίλυση των προβλημάτων.

- Η ουσιαστική γνώση της θεωρίας επιτυγχάνεται με την κατανόηση:
  - των ορισμών,
  - των θεωρημάτων (προσοχή στις γεωμετρικές ερμηνείες και τις εξαιρέσεις),
  - των σχετικών σχολίων.

Για να οργανώσουμε σωστά την επανάληψη της θεωρίας, χρήσιμο είναι να έχουμε ένα τετράδιο στο οποίο θα γράφουμε τους ορισμούς και τις αποδείξεις των θεωρημάτων.

- Οι ασκήσεις αφορούν:
  - την απλή εφαρμογή των ορισμών και των θεωρημάτων,
  - τη συνδυασμένη εφαρμογή τους.

Για να θεωρηθεί ολοκληρωμένη η επανάληψη αλλά και για να ελέγξουμε τις γνώσεις μας, μπορούμε να λύσουμε αντιπροσωπευτικές ασκήσεις από κάθε ενότητα.

Κατά τη διάρκεια των εξετάσεων:

- Διαβάζουμε μια φορά όλα τα θέματα, ώστε να σχηματίσουμε μια γενική εικόνα.

- Ξεκινάμε τις απαντήσεις μας από τα θέματα εκείνα για τα οποία είμαστε σίγουροι για τον τρόπο αντιμετώπισής τους. Συνήθως ξεκινάμε από τη θεωρία.

- Αντιμετώπιση ενός θέματος:
  - Διαβάζουμε προσεκτικά τα δεδομένα του θέματος.
  - Εντοπίζουμε τη διδακτική ενότητα όπου αναφέρεται.
  - Το ερμηνεύουμε με βάση τη θεωρία της αντίστοιχης διδακτικής ενότητας.
  - Προχωράμε στη λύση του θέματος αναφέροντας τα θεωρήματα που θα χρησιμοποιήσουμε και προσέχοντας εάν πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.Εάν δεν δίνονται στην εκφώνηση, τις αποδεικνύουμε.

Επιπλέον θα πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι τα υποερωτήματα ενός ερωτήματος συνδέονται μεταξύ τους. Ακόμη και εάν αγνοούμε τη λύση του 1^{ου} υποερωτήματος, μπορούμε να το θεωρήσουμε ως δεδομένο για την επίλυση του 2^{ου} κ.ο.κ.