

Άλγεβρα Γενικής Παιδείας Β' Λυκείου 2001

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

A.1. Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, με ακέραιους συντελεστές. Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου a_0 .

Μονάδες 6,5

A.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω πολυώνυμο $P(x)$ και ρ ένας πραγματικός αριθμός. Αν το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ και $\pi(x)$ είναι το ηλίκο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \rho$, τότε:

α. $P(x) = (x - \rho) \pi(x) + 1$

β. $\pi(x) = (x - \rho) P(x)$

γ. ο βαθμός του υπολοίπου της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - \rho$ είναι ίσος με μηδέν

δ. $P(\rho) = 0$.

Μονάδες 6

B.1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Η εξίσωση $3x^3 - 5x + 6 = 0$ έχει ρίζα το 4 .

β. Η εξίσωση $4x^4 + 5x^2 + 7x + 4 = 0$ έχει ρίζα το 2 .

γ. Η εξίσωση $6x^6 - 3x^3 + 2x^2 - x + 2 = 0$ δεν έχει ρίζα το - 3 .

Μονάδες 6

B.2. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Το πολυώνυμο $P(x) = (4x + 5)^{2004} + x^{2001}$ έχει παράγοντα το:

α. $x + 1$ **β.** $x - 1$ **γ.** x **δ.** $x + \frac{5}{4}$

Μονάδες 6,5

Ζήτημα 2ο

Για τη γωνία α ισχύει ότι

$$5 \operatorname{csc} 2\alpha - 14 \operatorname{csc} \alpha - 7 = 0 .$$

α. Να δείξετε ότι $\operatorname{csc} \alpha = -3/5$

Μονάδες 10

β. Αν επιπλέον ισχύει $\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu 2\alpha$, $\operatorname{csc} 2\alpha$ και $\epsilon\phi 2\alpha$.

Ζήτημα 3ο

Ο τρίτος όρος μιας αριθμητικής προόδου (a_n) είναι ίσος με $a_3 = \log 125$ και η διαφορά της είναι ίση με $\omega = \log 5$.

- α.** Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος a_1 της προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ω .
Μονάδες 8
- β.** Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = a_{21} + a_{22} + \dots + a_{29}$.
Μονάδες 8
- γ.** Έστω (β_n) μία γεωμετρική πρόοδος με $\beta_1 = a_1$ και $\beta_2 = a_2$, όπου a_1 και a_2 ο πρώτος και ο δεύτερος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου αντίστοιχα. Να υπολογίσετε το άθροισμα $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001}$.
Μονάδες 9

Ζήτημα 4ο

Έστω $Q(t)$ η τιμή ενός προϊόντος (σε εκατοντάδες χιλιάδες δραχμές), t έτη μετά την κυκλοφορία του προϊόντος στην αγορά. Η αρχική τιμή του προϊόντος ήταν 300.000 δραχμές, ενώ μετά από 6 μήνες η τιμή του είχε μειωθεί στο μισό της αρχικής του τιμής. Αν είναι γνωστό ότι ισχύει

$$\ln Q(t) = at + \beta, \quad t \geq 0$$

όπου $a, \beta \in \mathfrak{R}$, τότε:

- α.** να δείξετε ότι $Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$ για $t \geq 0$
Μονάδες 10
- β.** να βρείτε σε πόσο χρόνο η τιμή του προϊόντος θα γίνει ίση με $1/16$ της αρχικής του τιμής,
Μονάδες 8
- γ.** να βρείτε τον ελάχιστο χρόνο για τον οποίο η τιμή του προϊόντος δεν υπερβαίνει το $1/9$ της αρχικής του τιμής.
Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Ζήτημα 1ο

A.1. Αν ο $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε:

$$a_n \rho^n + a_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + a_1 \rho + a_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$a_0 = -a_n \rho^n - a_{n-1} \rho^{n-1} - \dots - a_1 \rho \Leftrightarrow$$

$$a_0 = \rho (-a_n \rho^{n-1} - a_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - a_1).$$

Επειδή οι $\rho, a_1, a_2, \dots, a_n$ είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $-a_n \rho^{n-1} - a_{n-1} \rho^{n-2} - \dots - a_1$ είναι ακέραιος.

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι ο ρ είναι διαιρέτης του a_0 .

A.2. Η σωστή απάντηση είναι η δ.

B.1. $\alpha \rightarrow \Lambda, \beta \rightarrow \Lambda, \gamma \rightarrow \Sigma$

B.2. Η σωστή απάντηση είναι η α.

Ζήτημα 2ο

α. Η δοσμένη σχέση γράφεται ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} 5 \cdot (2 \operatorname{csc}^2 \alpha - 1) - 14 \operatorname{csc} \alpha - 7 &= 0 \Leftrightarrow \\ 10 \operatorname{csc}^2 \alpha - 5 - 14 \operatorname{csc} \alpha - 7 &= 0 \Leftrightarrow \\ 10 \operatorname{csc}^2 \alpha - 14 \operatorname{csc} \alpha - 12 &= 0 \Leftrightarrow \\ 5 \operatorname{csc}^2 \alpha - 7 \operatorname{csc} \alpha - 6 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $\operatorname{csc} \alpha = \psi$ με $\psi \in [-1, 1]$ κι έχουμε:

$$5\psi^2 - 7\psi - 6 = 0$$

Είναι:

$$\Delta = 49 + 120 = 169 > 0$$

Οπότε:

- $\psi_1 = \frac{7 - \sqrt{169}}{10} = \frac{7 - 13}{10} = -\frac{6}{10} = -\frac{3}{5}$ δεκτή, αφού $-\frac{3}{5} \in [-1, 1]$
- $\psi_2 = \frac{7 + \sqrt{169}}{10} = \frac{7 + 13}{10} = \frac{20}{10} = 2$ απορρίπτεται., αφού $2 \notin [-1, 1]$

Άρα: $\operatorname{csc} \alpha = -3/5$

β. Από την βασική ταυτότητα:

$$\eta \mu^2 \alpha + \operatorname{csc}^2 \alpha = 1, \quad \text{με } \operatorname{csc} \alpha = -3/5$$

έχουμε:

$$\eta \mu^2 \alpha + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\eta \mu^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu^2 \alpha = \frac{16}{25} \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu \alpha = \pm \sqrt{\frac{16}{25}} = \pm \frac{4}{5}$$

Επειδή $\pi \leq \alpha \leq 3\pi/2$, είναι $\eta\mu \alpha \leq 0$, οπότε:

$$\eta\mu \alpha = -4/5$$

Είναι:

- $\eta\mu 2\alpha = 2 \eta\mu \alpha \sigma\upsilon\nu \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{24}{25}$
- $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = 2 \sigma\upsilon\nu^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = 2 \cdot \frac{9}{25} - 1 = \frac{18}{25} - 1 = -\frac{7}{25}$
- $\epsilon\varphi 2\alpha = \frac{\eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \frac{24/25}{-7/25} = -\frac{24}{7}$

Ζήτημα 3ο

α. Είναι: $a_3 = \log 125 = \log 5^3 = 3 \log 5$.

Επειδή η πρόοδος είναι αριθμητική με διαφορά ω , έχουμε ότι:

$$a_3 = a_1 + 2\omega \Leftrightarrow$$

$$a_1 = a_3 - 2\omega.$$

Άρα:

$$a_1 = 3 \log 5 - 2 \log 5 = \log 5.$$

β. Επειδή είναι :

$$a_1 = \log 5 \text{ και } \omega = \log 5, \text{ προκύπτει ότι:}$$

$$a_v = a_1 + (v - 1) \omega =$$

$$= \log 5 + (v - 1) \log 5 =$$

$$= \log 5 + v \log 5 - \log 5 =$$

$$= v \log 5.$$

Επομένως:

$$A = a_{21} + a_{22} + \dots + a_{29} =$$

$$= 21 \log 5 + 22 \log 5 + \dots + 29 \log 5 =$$

$$= (21 + 22 + \dots + 29) \log 5.$$

Όμως το άθροισμα $21 + 22 + \dots + 29$ είναι άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμ. πρόοδου με πρώτο όρο το 21, διαφορά 1 και πλήθος όρων 9. Οπότε

$$21 + 22 + \dots + 29 = \frac{[2 \cdot 21 + (9-1) \cdot 1] \cdot 9}{2} = \frac{(42+8) \cdot 9}{2} = \frac{50 \cdot 9}{2} = 25 \cdot 9 = 225$$

Άρα:

$$A = 225 \log 5.$$

γ. Επειδή η πρόδος (β_v) είναι γεωμετρική, ο λόγος της θα είναι:

$$\lambda = \frac{\beta_2}{\beta_1} = \frac{2 \log 5}{\log 5} = 2$$

οπότε:

$$\beta_v = \beta_1 \cdot \lambda^{v-1} = \log 5 \cdot 2^{v-1} = 2^{v-1} \cdot \log 5$$

Άρα

$$\begin{aligned} B &= \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \dots + \beta_{1999} + \beta_{2001} = \\ &= \log 5 + 2^2 \log 5 + 2^4 \log 5 + \dots + 2^{1998} \log 5 + 2^{2000} \log 5 = \\ &= (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{1998} + 2^{2000}) \log 5. \end{aligned}$$

Όμως το άθροισμα

$$\begin{aligned} &1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{1998} + 2^{2000} = \\ &1 + (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{1998} + 2^{2000}) = \\ &1 + [2^{2 \cdot 1} + 2^{2 \cdot 2} + \dots + 2^{2 \cdot 999} + 2^{2 \cdot 1000}] = \\ &1 + [(2^2)^1 + (2^2)^2 + \dots + (2^2)^{999} + (2^2)^{1000}] = \\ &= 1 + (4^1 + 4^2 + \dots + 4^{999} + 4^{1000}) = \\ &= 1 + \frac{4(4^{1000} - 1)}{4 - 1} = 1 + \frac{4}{3}(4^{1000} - 1) = 1 + \frac{4^{1001}}{3} - \frac{4}{3} = \\ &= \frac{1}{3}4^{1001} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(4^{1001} - 1) \end{aligned}$$

Άρα:

$$B = \frac{1}{3}(4^{1001} - 1) \log 5$$

Ζήτημα 4ο

α. Όταν ο χρόνος είναι $t = 0$, τότε η αρχική τιμή θα είναι $Q(0) = 3$, οπότε:

$$\ln Q(0) = a \cdot 0 + \beta = \beta$$

Άρα:

$$\beta = \ln 3 \quad (1)$$

Μετά από 6 μήνες (δηλαδή μετά από μισό έτος, $t=1/2$) η τιμή του προϊόντος θα είναι:

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = 1,5 = \frac{3}{2}$$

οπότε:

$$\ln Q\left(\frac{1}{2}\right) = \alpha \cdot \frac{1}{2} + \ln 3$$

Επομένως:

$$\ln \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \alpha + \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln 3 - \ln 2 = \frac{1}{2} \alpha + \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$-\ln 2 = \frac{1}{2} \alpha \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -2 \ln 2 \Leftrightarrow$$

$$\alpha = \ln(2^{-2}) \quad (2)$$

Από την σχέση $\ln Q(t) = \alpha t + \beta$ λόγω των σχέσεων (1) και (2) έχουμε:

$$\ln Q(t) = t \cdot \ln 2^{-2} + \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln Q(t) = \ln 2^{-2t} + \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$\ln Q(t) = \ln 3 \cdot 2^{-2t} \Leftrightarrow$$

$$\ln Q(t) = \ln 3 \cdot 4^{-t}$$

Άρα:

$$Q(t) = 3 \cdot 4^{-t}$$

β. Αν είναι:

$$Q(t) = \frac{1}{16} Q(0) = \frac{1}{16} \cdot 3$$

τότε σύμφωνα με τον προηγούμενο τύπο έχουμε:

$$\frac{3}{16} = 3 \cdot 4^{-t} \Leftrightarrow \frac{1}{16} = 4^{-t} \Leftrightarrow 4^{-2} = 4^{-t}$$

Άρα:

$$t = 2 \text{ \u0395\u03c4\u03b7.}$$

γ. Πρέπει:

$$Q(t) \leq \frac{1}{9} \cdot Q(0) \Leftrightarrow Q(t) \leq \frac{1}{9} \cdot 3 \Leftrightarrow$$

$$3 \cdot 4^{-t} \leq \frac{3}{9} \Leftrightarrow 3 \cdot 4^{-t} \leq \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$4^{-t} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow 4^{-t} \leq 3^{-2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{4^t} \leq \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow 4^t \geq 3^2$$

($4^t > 0$ για κάθε $t \geq 0$ και $3^2 > 0$)

Επειδή $4^t > 0$ για κάθε $t \geq 0$ και $3^2 > 0$, λογαριθμίζουμε την τελευταία και βρίσκουμε:

$$\ln 4^t \geq \ln 3^2 \Leftrightarrow t \ln 4 \geq 2 \cdot \ln 3 \Leftrightarrow$$

$$t \geq \frac{2 \ln 3}{\ln 4} \Leftrightarrow t \geq \frac{2 \ln 3}{2 \ln 2} \Leftrightarrow$$
$$t \geq \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Άρα:

$$t = \frac{\ln 3}{\ln 2} \text{ έτη.}$$