

**ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β' ΤΑΞΗΣ**  
**ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ 2003**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.** Έστω ένας κύκλος  $(O,R)$ .

**α.** Στον κύκλο  $(O,R)$  να εγγράψετε τετράγωνο.

Μονάδες 4

**β.** Να αποδείξετε ότι  $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ , όπου  $\lambda_4$  η πλευρά του τετραγώνου.

Μονάδες 4

**γ.** Να αποδείξετε ότι  $\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ , όπου  $\alpha_4$  το απόστημα του τετραγώνου.

Μονάδες 4

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη "**Σωστό**" αν η πρόταση είναι σωστή και "**Λάθος**" αν η πρόταση είναι λάθος, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

**α.** Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια τότε, ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο της ομοιότητας.

Μονάδες 2

**β.** Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεων του επί το ύψος του.

Μονάδες 2

**γ.** Η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο  $(O,R)$  ορίζεται με τον τύπο:

$$\Delta_{(O,R)}^P = R^2 + OP^2.$$

Μονάδες 2

**δ.** Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Μονάδες 2

**Γ.** Ποιο πολύγωνο λέγεται κανονικό;

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ 2ο**

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με  $AB = AG = 1$  και  $\angle B = \angle G = \sqrt{3}$ .

Να υπολογίσετε:

**α.** τη γωνία  $\hat{A}$

Μονάδες 9

**β.** το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

Μονάδες 9

**γ.** τη διάμεσο  $BM = \mu_\beta$ .

Μονάδες 7

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές  $a, \beta, \gamma$  τέτοιες, ώστε να ισχύει  $\beta^2 + \gamma^2 = 3a^2$ . Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου ΑΒΓ στο Ε,

α. να εκφράσετε τη διάμεσο ΑΜ ως συνάρτηση της πλευράς  $a$ .

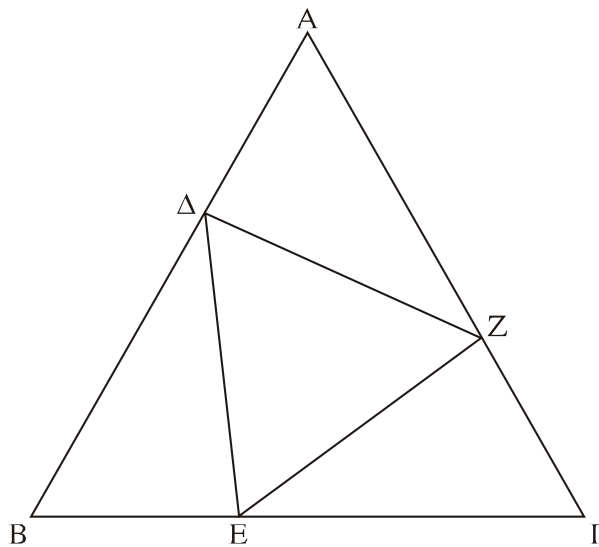
Μονάδες 12

β. να αποδείξετε ότι  $AM \cdot AE = \frac{3a^2}{2}$ .

Μονάδες 13

### ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ, πλευράς  $a$ . Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ, Ε, Ζ τέτοια, ώστε να είναι  $AD = BE = GZ = \frac{1}{3}a$ , όπως στο παρακάτω σχήμα.



Να υπολογίσετε το εμβαδόν ως συνάρτηση του  $a$ :

α. του τριγώνου ΑΔΖ

Μονάδες 9

β. του τριγώνου ΔΕΖ

Μονάδες 7

γ. του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο ΑΒΓ.

Μονάδες 9

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

**A.** Θεωρία. Παράγραφος 11.3 σχολικού βιβλίου σελ. 238.

**B.**

**α** - Λ

**β** - Σ

**γ** - Λ

**δ** - Σ\*

**Γ.** Ορισμός σελ. 233 σχολικού βιβλίου.

---

\*: Η απάντηση στο **B-δ** υποερώτημα είναι Σωστό, αφού διατυπώνεται θεώρημα που αναγράφεται ακριβώς έτσι στο σχολικό βιβλίο. Όμως, η ακριβέστερη διατύπωση αυτού του θεωρήματος θα έπρεπε αντί "Η διαφορά των τετραγώνων..." να ήταν "Η απόλυτη τιμή της διαφοράς των τετραγώνων...".

### ΘΕΜΑ 2ο

**α.** Από το νόμο συνημιτόνων στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 - 2AB \cdot A\Gamma \cdot \sin A,$$

$$\text{οπότε } (\sqrt{3})^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin A \quad \text{ή}$$

$$3 = 2 - 2\sin A \quad \text{ή} \quad \sin A = -(1/2) \quad \text{ή}$$

$$\sin A = \sin \frac{2\pi}{3}.$$

$$\text{Επειδή } 0 < \hat{A} < \pi \text{ είναι } A = \frac{2\pi}{3} \quad \text{ή} \quad A = 120^\circ.$$

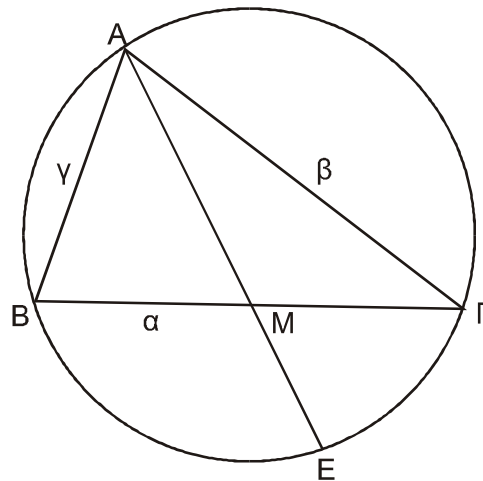
**β.** Από τον τύπο έχουμε:  $E = \frac{1}{2} \beta \gamma \cdot \eta\mu A$

$$E = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \eta\mu \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \text{ τ.μ.}$$

**γ.** Από το 1<sup>ο</sup> θεώρημα διαμέσων στο τρίγωνο ABΓ έχουμε:

$$\mu_\beta^2 = \frac{2a^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 1^2 - 1^2}{4} = \frac{7}{4} \quad \text{οπότε} \quad \mu_\beta = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

### ΘΕΜΑ 3<sup>ο</sup>



- α. Εφαρμόζουμε το 1<sup>ο</sup> θεώρημα των διαμέσων στο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε:

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2AM^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (1).$$

Η (1) λόγω της δοσμένης σχέσης  $\beta^2 + \gamma^2 = 3\alpha^2$ , γράφεται:

$$3\alpha^2 = 2AM^2 + \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2AM^2 = 3\alpha^2 - \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow 2AM^2 = \frac{5\alpha^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow AM^2 = \frac{5\alpha^2}{4} \Leftrightarrow AM = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$$

- β. Από το θεώρημα των τεμνομένων χορδών έχουμε:

$$MA \cdot ME = MB \cdot MG = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha^2}{4}. \text{ Επομένως:}$$

$$\begin{aligned} AM \cdot AE &= AM \cdot (AM + ME) = AM^2 + AM \cdot ME = \\ &= AM^2 + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{5\alpha^2}{4} + \frac{\alpha^2}{4} = \frac{6\alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{2}. \end{aligned}$$

### ΘΕΜΑ 4ο

- α. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΖ είναι:

$$\begin{aligned} (A\Delta Z) &= (1/2) \cdot A\Delta \cdot AZ \cdot \eta\mu A = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\alpha\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\alpha\right) \eta\mu 60^\circ = \\ &= \frac{\alpha^2}{9} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{18} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

- β. Τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΒΕΔ είναι ίσα γιατί έχουν:

- $A\Delta = BE = (1/3)\alpha$
- $AZ = B\Delta = (2/3)\alpha$
- $\hat{A} = \hat{B} = 60^\circ$

Με ανάλογο τρόπο δείχνουμε ότι και τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΖΓΕ είναι ίσα. Επομένως ισχύει ότι:

Τα τρίγωνα ΑΔΖ, ΔΒΕ, ΖΓΕ είναι μεταξύ τους ίσα, οπότε είναι και ισοδύναμα. Συνεπώς:

$$(\Delta EZ) = (AB\Gamma) - 3(\Lambda\Delta Z) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - 3\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{18} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{6} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{12} \text{ τ.μ.}$$

**Υ.** Η πλευρά του ισοπλεύρου τριγώνου  $AB\Gamma$  ως συνάρτηση της ακτίνας  $R$  του περιγεγραμμένου σ' αυτό κύκλου είναι:  $\lambda_3 = R\sqrt{3}$ .

Επειδή  $\lambda_3 = \alpha$  προκύπτει ότι:

$$\alpha = R\sqrt{3} \Leftrightarrow R = \frac{\alpha}{\sqrt{3}} = \frac{\alpha\sqrt{3}}{3}.$$

Επομένως το εμβαδόν του περιγεγραμμένου, στο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , κύκλου είναι:

$$E = \pi \left( \frac{\alpha\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \pi \frac{3\alpha^2}{9} = \frac{\pi\alpha^2}{3} \text{ τ.μ.}$$