

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΚΥΚΛΟΥ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΤΕΕ 2003

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Μια μεταβλητή παίρνει τις τιμές: 5, 3, 3ω, 3, 2ω, 3, 3ω, ω με $\omega > 0$

α) Αν η μέση τιμή τους είναι $\bar{x} = 4$, να αποδείξετε ότι $\omega = 2$.

Μονάδες 7

β) Για $\omega = 2$ να βρείτε:

i) Το εύρος των τιμών.

Μονάδες 5

ii) Την επικρατούσα τιμή.

Μονάδες 5

iii) Την τυπική απόκλιση.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \lambda - 2, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$

Όπου $\lambda \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε το $f(0)$ και το $f(2)$.

Μονάδες 6

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1}$

Μονάδες 10

γ) Να βρείτε το λ , ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$ με $x > 0$.

α) Να βρείτε το $f(1)$.

Μονάδες 4

β) Να βρείτε την $f'(x)$ και την $f''(x)$

Μονάδες 14

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Το ύψος (σε m) που βρίσκεται ένα τηλεκατευθυνόμενο μοντέλο αεροπλάνου, μετά από χρόνο πτήσης t (sec) δίνεται από τη συνάρτηση:

$$f(t) = -3t^2 + 30t, \text{ όπου } 0 \leq t \leq 10$$

α) Σε ποιο ύψος βρίσκεται το αεροπλάνο τη χρονική στιγμή $t=0$;

Μονάδες 5

β) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του ύψους του αεροπλάνου μετά από χρόνο t .

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα κατά το οποίο το αεροπλάνο ανεβαίνει, καθώς και το χρονικό διάστημα κατά το οποίο κατεβαίνει.

Μονάδες 7

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t κατά την οποία το αεροπλάνο βρίσκεται στο μέγιστο ύψος, καθώς και το ύψος αυτό.

Μονάδες 6

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

$$\alpha) \bar{x} = 4 \Leftrightarrow \frac{5 + 3 + 3\omega + 3 + 2\omega + 3 + 3\omega + \omega}{8} = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{9\omega + 14}{8} = 4 \Leftrightarrow 9\omega + 14 = 32 \Leftrightarrow 9\omega = 18 \Leftrightarrow \omega = 2.$$

β)

i) Για $\omega = 2$ οι τιμές της μεταβλητής γίνονται: 5, 3, 6, 3, 4, 3, 6, 2.
Η μεγαλύτερη τιμή είναι 6 ενώ η μικρότερη 2. Έτσι προκύπτει ότι το εύρος είναι 4.

ii) Από τον πίνακα συχνοτήτων:

x_i	2	3	4	5	6
v_i	1	3	1	1	2

προκύπτει ότι η επικρατούσα τιμή είναι η 3.

$$\text{iii) } S = \sqrt{\frac{(2-4)^2 + 3(3-4)^2 + (4-4)^2 + (5-4)^2 + 2(6-4)^2}{8}} =$$

$$= \sqrt{\frac{4 + 3 + 0 + 1 + 8}{8}} = \sqrt{\frac{16}{8}} = \sqrt{2}.$$

ΘΕΜΑ 2ο

α) Είναι:

$$\bullet f(0) = \frac{0^2 + 6 \cdot 0 - 7}{0 - 1} = \frac{-7}{-1} = 7.$$

$$\bullet f(2) = \frac{2^2 + 6 \cdot 2 - 7}{2 - 1} = \frac{4 + 12 - 7}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 7)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 7) = 8.$$

γ) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$$

$$\text{Δηλαδή } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \lambda - 2 \quad \text{ή} \quad \lim_{x \rightarrow 1} (x + 7) = \lambda - 2 \quad \text{ή} \quad 8 = \lambda - 2. \quad \text{Άρα } \lambda = 10.$$

ΘΕΜΑ 3ο

α) Είναι: $f(1)=\ln 1+1-1=0$

β) Η f είναι παραγωγίσιμη 2-φορές για κάθε $x>0$ με

• $f'(x)=(\ln x+x-1)'=(\ln x)'+x'-1'=\frac{1}{x}+1$ και

• $f''(x)=\left(\frac{1}{x}+1\right)'=\left(\frac{1}{x}\right)'+1'=\left(\frac{1}{x}\right)'=\frac{1'x-1x'}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$.

γ) Επειδή $f'(x)=\frac{1}{x}+1>0$ για κάθε $x>0$ προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x>0$.

ΘΕΜΑ 4ο

α) Τη χρονική στιγμή $t=0$ το αεροπλάνο βρίσκεται σε ύψος

$$h=f(0)=-3 \cdot 0^2+30 \cdot 0=0\text{m}$$

β) Ο ρυθμός μεταβολής τη χρονική στιγμή t είναι:

$$f'(t)=(-3t^2+30t)'=-6t+30.$$

γ) Προκειμένου να βρούμε τα διαστήματα ανόδου και καθόδου του αεροπλάνου αρκεί να μελετήσουμε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο διάστημα $[0, 10]$.

• $H f'(t) > 0 \Leftrightarrow -6t+30 > 0 \Leftrightarrow 6t < 30 \Leftrightarrow t < 5$

Επομένως στο διάστημα $[0, 5]$ το αεροπλάνο ανεβαίνει.

• $H f'(t) < 0 \Leftrightarrow -6t+30 < 0 \Leftrightarrow 6t > 30 \Leftrightarrow t > 5.$

Επομένως στο διάστημα $[5, 10]$ το αεροπλάνο κατεβαίνει.

δ) Σύμφωνα με το ερώτημα (γ) έχουμε τον ακόλουθο πίνακα

t	0	5	10
f'(t)		+	-
f(t)		γ. αύξουσα	γ. φθίνουσα

Επομένως για την τιμή $t=5$ η συνάρτηση $f(t)$ παρουσιάζει μέγιστο, $f(5)=-3 \cdot 5^2+30 \cdot 5=-3 \cdot 25+150=-75+150=75.$

Άρα τη χρονική στιγμή $t=5$ sec το Αεροπλάνο βρίσκεται σε μέγιστο ύψος που είναι $f(5)=75$ μέτρα.