ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2003

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $\vec{\alpha}, \vec{v}$ είναι δύο διανύσματα του επιπέδου με $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και η προβολή του $\vec{v}$ στο $\vec{\alpha}$ συμβολίζεται με $\pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$, τότε να αποδείξετε ότι

$\vec{\alpha} \cdot \vec{v} = \vec{\alpha} \cdot \pi\rho o\beta_{\vec{\alpha}} \vec{v}$.

Μονάδες 7

Β. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$ (δηλαδή τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ έχουν αντίθετη κατεύθυνση) τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

Μονάδες 2

β. Η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = \rho^2$ στο σημείο του $A(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση $xy + x_1y_1 = \rho^2$.

Μονάδες 2

γ. Η εξίσωση της έλλειψης με εστίες τα σημεία Ε΄(—γ,0), Ε(γ,0) και σταθερό άθροισμα 2α είναι $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ όπου $\beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$.

Μονάδες 2

δ. Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$.

Μονάδες 2

Γ.

α. Αν α, β είναι δύο ακέραιοι με β ≠ 0, πότε θα λέμε ότι ο β διαιρεί τον α;

Μονάδες 5

β. Δίνονται μια ευθεία δ και ένα σημείο Ε εκτός της δ. Τι ονομάζεται παραβολή με εστία το σημείο Ε και διευθετούσα την ευθεία δ;

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 2ο

Έστω $\alpha \in \mathbf{Z}$. Να αποδείξετε ότι:

Α. Ο αριθμός α^3 παίρνει την μορφή
$\alpha^3 = 8k$ όπου $k \in \mathbf{Z}$ ή $\alpha^3 = 2k + 1$ όπου $k \in \mathbf{Z}$.

Μονάδες 12

Β. Ο αριθμός $\alpha(\alpha^2 + 1)$ είναι άρτιος.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται ένα τρίγωνο με κορυφές $A(2\lambda - 1, 3\lambda + 2)$,
$B(1,2)$ και $\Gamma(2,3)$ όπου $\lambda \in \Re$ με $\lambda \neq -2$.

Α. Να αποδείξετε ότι το σημείο Α κινείται σε ευθεία, καθώς το λ μεταβάλλεται στο $\Re$.

Μονάδες 8

Β. Εάν $\lambda=1$, να βρείτε:

α. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

Μονάδες 8

β. την εξίσωση του κύκλου, που έχει κέντρο την κορυφή $A(1,5)$ και εφάπτεται στην ευθεία ΒΓ.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται δύο κωνικές τομές:
η παραβολή $y^2 = 2px$, και
η έλλειψη $4x^2 + 2y^2 = 3p^2$, $p > 0$.

Α. Να αποδείξετε ότι οι εστίες Ε και Ε΄ της έλλειψης είναι τα σημεία $E\left(0, \frac{\sqrt{3}\,p}{2}\right)$ και $E'\left(0, -\frac{\sqrt{3}\,p}{2}\right)$.

Μονάδες 8

Β. Να αποδείξετε ότι τα σημεία τομής Κ και Λ των δύο κωνικών τομών είναι τα σημεία $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ και $\Lambda\left(\frac{p}{2}, -p\right)$.

Μονάδες 8

Γ. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των δύο κωνικών τομών στο σημείο $K\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι κάθετες.

Μονάδες 9

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία: σελ. 45 σχολικού βιβλίου.
Β. **α** - Σ, **β** - Λ, **γ** - Σ, **δ** - Λ.
Γ. **α.** Ορισμός σελ. 146 σχολικού βιβλίου.
β. Ονομάζεται παραβολή με εστία Ε και διευθετούσα την ευθεία δ, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από την Ε και τη δ.

ΘΕΜΑ 2ο

Κάθε ακέραιος $\alpha \in \mathbf{Z}$ γράφεται: $\alpha = 2\lambda$ ή $\alpha = 2\lambda + 1$, όπου $\lambda \in \mathbf{Z}$.

Α. **1)** Όταν $\alpha = 2\lambda$, τότε $\alpha^3 = (2\lambda)^3 = 8\lambda^3$. Επειδή $\lambda \in \mathbf{Z}$ είναι και $\lambda^3 \in \mathbf{Z}$, οπότε μπορούμε να θέσουμε $\lambda^3 = \kappa \in \mathbf{Z}$. Έτσι έχουμε $\alpha^3 = 8\kappa$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

2) Όταν $\alpha = 2\lambda + 1$, τότε $\alpha^3 = (2\lambda + 1)^3 = (2\lambda)^3 + 3(2\lambda)^2 + 3(2\lambda) + 1 =$
$= 8\lambda^3 + 12\lambda^2 + 6\lambda + 1 = 2(4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda) + 1$.
Ο αριθμός $4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda$ είναι ακέραιος ως άθροισμα ακεραίων οπότε μπορούμε να θέσουμε $4\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda = \kappa \in \mathbf{Z}$. Έτσι έχουμε: $\alpha^3 = 2\kappa + 1$, $\kappa \in \mathbf{Z}$.

Β. **1)** Όταν $\alpha = 2\lambda$, τότε λόγω του $\mathbf{A_1}$ ισχύει:
$\alpha(\alpha^2 + 1) = \alpha^3 + \alpha = 8\kappa + 2\lambda = 2(4\kappa + \lambda)$, με $\kappa, \lambda \in \mathbf{Z}$.
Αν θέσουμε $4\kappa + \lambda = \rho \in \mathbf{Z}$, έχουμε $\alpha(\alpha^2 + 1) = 2\rho$: άρτιος.

2) Όταν $\alpha = 2\lambda + 1$ τότε λόγω του $\mathbf{A_2}$ ισχύει:
$\alpha(\alpha^2 + 1) = \alpha^3 + \alpha = 2\kappa + 1 + 2\lambda + 1 = 2(\kappa + \lambda + 1)$, με $\kappa, \lambda \in \mathbf{Z}$.
Αν θέσουμε $\kappa + \lambda + 1 = \mu \in \mathbf{Z}$, έχουμε $\alpha(\alpha^2 + 1) = 2\mu$: άρτιος.

ΘΕΜΑ 3ο

Α. Θέτουμε $2\lambda - 1 = x_A$ και $3\lambda + 2 = y_A$ και απαλείφοντας το λ έχουμε αντίστοιχα:
$\lambda = \frac{x_A + 1}{2}$ και $\lambda = \frac{y_A - 2}{3}$.

Προκύπτει έτσι $\frac{x_A + 1}{2} = \frac{y_A - 2}{3} \Leftrightarrow 3x_A + 3 = 2y_A - 4 \Leftrightarrow 3x_A - 2y_A + 7 = 0$.

Έτσι, όταν το λ μεταβάλλεται στο $\Re$, το σημείο Α διατρέχει την ευθεία $3x - 2y + 7 = 0$.

Β.

α. Εάν $\lambda = 1$, οι κορυφές του τριγώνου είναι Α(1,5), Β(1,2), Γ(2,3). Έτσι είναι:
$\overrightarrow{AB} = (0,-3), \overrightarrow{A\Gamma} = (1,-2)$ και το εμβαδό (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(AB\Gamma) = \frac{1}{2}\det|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma})| = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2}|0+3| = \frac{3}{2}\,\tau.\mu.$$

β. Για τον κύκλο με κέντρο Α, που εφάπτεται της ΒΓ, η ακτίνα του είναι $R = d(A, B\Gamma)$. Όμως η εξίσωση της ΒΓ είναι:

$y - y_B = \lambda_{B\Gamma}(x - x_B) \Leftrightarrow y - 2 = \frac{3-2}{2-1}(x-1) \Leftrightarrow y - 2 = x - 1 \Leftrightarrow x - y + 1 = 0$

Έτσι είναι:

$$R = \frac{|1 \cdot x_A - 1 \cdot y_A + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 + 1|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Άρα η εξίσωση του ζητούμενου κύκλου είναι: $(x-1)^2+(y-5)^2=\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2$.

ΘΕΜΑ 4ο

Α. Η εξίσωση $4x^2 + 2\psi^2 = 3p^2$ γράφεται

$$\frac{4x^2}{3p^2}+\frac{2\psi^2}{3p^2}=1 \text{ ή } \frac{x^2}{\frac{3p^2}{4}}+\frac{\psi^2}{\frac{3p^2}{2}}=1 \text{ ή } \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{3}p}{2}\right)^2}+\frac{\psi^2}{\left(\frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{2}}\right)^2}=1.$$

Επειδή $2>\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{3}p}{2}<\frac{\sqrt{3}p}{\sqrt{2}}$ (αφού $p > 0$).

Επομένως ο μεγάλος άξονας της έλλειψης βρίσκεται στον άξονα $y'y$. Έτσι έχουμε:

$$\alpha^2=\frac{3p^2}{2} \text{ και } \beta^2=\frac{3p^2}{4}.$$

Από τη σχέση $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$, έχουμε: $\gamma^2=\frac{3p^2}{2}-\frac{3p^2}{4}=\frac{6p^2}{4}-\frac{3p^2}{4}=\frac{3p^2}{4}$,

οπότε $\gamma=\sqrt{\frac{3p^2}{4}}=\frac{p\sqrt{3}}{2}$. Άρα οι εστίες της έλλειψης είναι τα σημεία:

$$E\left(0,\frac{\sqrt{3}p}{2}\right) \text{ και } E'\left(0,-\frac{\sqrt{3}p}{2}\right).$$

Β. Επειδή $p > 0$, προκύπτει από την εξίσωση $y^2 = 2px$ ότι $x \geq 0$. (1)

Τα σημεία τομής των δύο κωνικών τομών προκύπτουν από τη λύση του συστήματος:

$$y^2 = 2px \quad (2)$$
$$4x^2 + 2y^2 = 3p^2 \quad (3)$$

Η (3) γράφεται: $4x^2 + 4px - 3p^2 = 0$. Η διακρίνουσά της είναι: $\Delta = 16p^2 + 48p^2 = 64p^2 > 0$, οπότε προκύπτουν οι λύσεις:

$x_1=\frac{-4p-8p}{8}=\frac{-3p}{2}$ η οποία απορρίπτεται λόγω της (1),

$x_2=\frac{-4p+8p}{8}=\frac{p}{2}$ δεκτή.

Την τιμή $x=x_2=\frac{p}{2}$, αντικαθιστούμε στη (2) και βρίσκουμε:

$y^2=2p\frac{p}{2}=p^2$, οπότε $y = -p$ ή $y = p$. Άρα τα σημεία τομής των δύο κωνικών τομών είναι:

$$K\left(\frac{p}{2},p\right) \text{ και } \Lambda\left(\frac{p}{2},-p\right).$$

Γ.

- Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε_1) της παραβολής στο σημείο της

  $$K\left(\frac{p}{2},p\right) \text{ είναι } yp=p\left(x+\frac{p}{2}\right)\Leftrightarrow yp=px+\frac{p^2}{2}\Leftrightarrow px-py+\frac{p^2}{2}=0,$$

  της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\lambda_1=-\frac{p}{-p}=1$.

- Η εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας (ε_2) της έλλειψης στο σημείο της

$\Lambda\left(\frac{p}{2}, p\right)$ είναι $\frac{x\frac{p}{2}}{\frac{3p^2}{4}} + \frac{yp}{\frac{3p^2}{2}} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{3p} + \frac{2y}{3p} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{3p}x + \frac{2}{3p}y = 1$,

της οποίας ο συντελεστής διεύθυνσης είναι

$$\lambda_2 = -\frac{\frac{2}{3p}}{\frac{2}{3p}} = -1.$$

Επειδή $\lambda_1\lambda_2 = (+1)(-1) = -1$, προκύπτει ότι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.