

**Μαθηματικά**  
**Θετικής & Τεχν/κής Κατεύθυνσης**  
**Β' Λυκείου 2001**

**Ζήτημα 1ο**

**A.1.** Έστω  $a, \beta, \gamma$  ακέραιοι αριθμοί. Να δείξετε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες:

**α.** Αν  $a|\beta$ , τότε  $a|\lambda\beta$  για κάθε ακέραιο  $\lambda$ .

Μονάδες 4

**β.** Αν  $a|\beta$  και  $a|\gamma$ , τότε  $a|(\beta+\gamma)$ .

Μονάδες 4

**A.2.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Έστω  $a, \beta$  φυσικοί αριθμοί και  $u$  το υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του  $a$  με τον  $\beta \neq 0$ . Τότε:

**α.**  $(a,\beta) < (\beta,u)$

**β.**  $(a,\beta) = (\beta,u)$

**γ.**  $(a,\beta) > (\beta,u)$

**δ.**  $(a,\beta) = (\beta,u) + 1$

όπου  $(a,\beta)$  είναι ο Μ.Κ.Δ. των φυσικών αριθμών  $a, \beta$ .

Μονάδες 4,5

**B.1.** Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Αν  $7 | (a+5)$  και  $7 | (40-\beta)$  τότε:

**α.**  $7 | (a+\beta)$ ,

**β.**  $7 | (a+\beta+1)$ ,

**γ.**  $7 | (a+\beta+2)$ ,

**δ.**  $7 | (a+\beta-3)$ .

Μονάδες 4

**B.2.** Να προσδιορίσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4,5

**B.3.** Να εκφράσετε τον Μ.Κ.Δ. των ακεραίων 72 και 112 ως γραμμικό συνδυασμό των ακεραίων 72 και 112.

Μονάδες 4

**Απάντηση:**

**A1.**

**α.** Επειδή  $a | \beta$  υπάρχει ακέραιος  $\kappa$ , τέτοιος ώστε  $\beta = \kappa a$ , οπότε  
 $\lambda\beta = \lambda\kappa a$  και άρα:  $a | \lambda\beta$

**β.** Επειδή  $a | \beta$  και  $a | \gamma$ , υπάρχουν ακέραιοι  $\kappa, \lambda$  τέτοιοι ώστε  
 $\beta = \kappa a$  και  $\gamma = \lambda a$ . Οπότε:  
 $\beta + \gamma = \kappa a + \lambda a$  ή  
 $(\beta + \gamma) = (\kappa + \lambda)a$   
Άρα:  $a | (\beta + \gamma)$

**A2.** Απάντηση: **β**

**B1.** Είναι:

$$\left. \begin{array}{l} 7 \mid (\alpha + 5) \\ 7 \mid (40 - \beta) \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \mid (\alpha + 5 - (40 - \beta))$$
$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} 7 \mid \alpha + \beta - 35 \\ \text{Όμως: } 7 \mid 35 \end{array} \right\} \Rightarrow 7 \mid \alpha + \beta$$

οπότε: Απάντηση: **α**

**B2.**  $(72, 112) = (8 \cdot 9, 8 \cdot 14) = 8(9, 14) = 8 \cdot 1 = 8$

**B3.**  $112 = 72 \cdot 1 + 40 \Leftrightarrow 40 = 112 - 72 \cdot 1$   
 $72 = 40 \cdot 1 + 32 \Leftrightarrow 32 = 72 - 40 \cdot 1$   
 $40 = 1 \cdot 32 + 8 \Leftrightarrow 8 = 40 - 1 \cdot 32$   
 $32 = 8 \cdot 4 + 0$

Άρα:

$$\begin{aligned} 8 &= 40 - 1 \cdot 32 = 40 - 1(72 - 40 \cdot 1) \\ &= 2 \cdot 40 - 72 \\ &= 2(112 - 72) - 72 \\ &= -3 \cdot 72 + 2 \cdot 112 \end{aligned}$$

## Ζήτημα 2ο

Για τα διανύσματα  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  δίνεται ότι  $|\vec{\alpha}|=1, |\vec{\beta}|=2$  και  $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{3}$ .

Έστω τα διανύσματα  $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}, \vec{v} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

Να υπολογίσετε:

**α.** το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

Μονάδες 5

**β.** τα μέτρα  $|\vec{u}|, |\vec{v}|$  των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$

Μονάδες 8

**γ.** το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Μονάδες 7

**δ.** το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$ .

Μονάδες 5

**Απάντηση:**

**α.** Είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos(\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

**β.**

$$|\vec{u}|^2 = (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})^2 = 4\vec{\alpha}^2 + 9\vec{\beta}^2 + 12\vec{\alpha}\vec{\beta} = 4 \cdot 1 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 1 = 52$$

Άρα:  $|\vec{u}| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$$|\vec{v}|^2 = (\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 + 4\vec{\beta}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} = 1 + 4 \cdot 4 - 4 = 17 - 4 = 13$$

Άρα:  $|\vec{v}| = \sqrt{13}$

**γ.**

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta})(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}) = 2\vec{\alpha}^2 - 4\vec{\alpha}\vec{\beta} + 3\vec{\alpha}\vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = \\ &= 2\vec{\alpha}^2 - \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} - 6\vec{\beta}^2 = 2 \cdot 1 - 1 - 6 \cdot 4 = 1 - 24 = -23 \end{aligned}$$

**δ.**

$$\widehat{\text{συν}}(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-23}{2\sqrt{13} \cdot \sqrt{13}} = -\frac{23}{26}$$

### Ζήτημα 3ο

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 - y^2 + 6x + 9 = 0$ .

**α.** Να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση παριστάνει 2 ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$ .

Μονάδες 7

**β.** Να δείξετε ότι οι ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  είναι κάθετες.

Μονάδες 7

**γ.** Να βρείτε ένα σημείο  $M(\kappa, \lambda)$  με  $\kappa > 0$  και  $\lambda > 0$  τέτοιο, ώστε το διάνυσμα  $\vec{\alpha} = (3, \kappa)$  να είναι παράλληλο προς τη μία από τις δύο ευθείες  $\epsilon_1$  και  $\epsilon_2$  και το διάνυσμα  $\vec{\beta} = (-16, 4\lambda)$  να είναι παράλληλο προς την άλλη ευθεία.

Μονάδες 6

**δ.** Να γράψετε την εξίσωση της παραβολής που έχει κορυφή την αρχή των αξόνων  $O$ , άξονα συμμετρίας τον άξονα  $x'x$  και διέρχεται από το σημείο  $M$ .

Μονάδες 5

#### Απάντηση:

**α.**

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 + 6x + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 - y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)^2 - y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3+y)(x+3-y) &= 0 \\ \Leftrightarrow (\epsilon_1): y = -x - 3 &\quad \text{ή} \quad (\epsilon_2): y = x + 3 \end{aligned}$$

**β.**  $\lambda_{\epsilon_1} = -1, \lambda_{\epsilon_2} = 1$   
Οπότε:  $\lambda_{\epsilon_1} \cdot \lambda_{\epsilon_2} = -1$   
Άρα:  $(\epsilon_1) \perp (\epsilon_2)$

**γ.** Είναι:

$$\begin{pmatrix} \vec{a} = (3, \kappa) \parallel (\varepsilon_1) \\ \vec{\beta} = (-16, 4\lambda - \kappa) \parallel (\varepsilon_2) \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \vec{a} = (3, \kappa) \parallel (\varepsilon_2) \\ \vec{\beta} = (-16, 4\lambda - \kappa) \parallel (\varepsilon_1) \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{3} = -1 \\ \frac{4\lambda}{-16} = 1 \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{3} = 1 \\ \frac{4\lambda}{-16} = -1 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \kappa = -3 \\ \lambda = -4 \\ \text{απορρ.} \end{pmatrix} \quad \text{ή} \quad \begin{pmatrix} \kappa = 3 \\ \lambda = 4 \\ \text{δεκτές} \end{pmatrix}$$

Άρα:  $M(3,4)$

**δ.** Η εξίσωση της παραβολής είναι:  $\psi^2 = 2\rho x$

Επειδή το σημείο  $M(3,4)$  ανήκει σ'αυτή, έχουμε:

$$16 = 2 \cdot \rho \cdot 3 \Leftrightarrow \frac{16}{6} = \rho \Leftrightarrow \rho = \frac{8}{3}$$

Άρα:

$$\psi^2 = 2 \cdot \frac{8}{3} x \Leftrightarrow \psi^2 = \frac{16}{3} x$$

## Ζήτημα 4ο

**A.** Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$ , όπου  $\mu, \lambda$  πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή των  $\mu, \lambda$ , η παραπάνω εξίσωση παριστάνει κύκλο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O$ .

Μονάδες 7

**B.** Έστω ότι για τους πραγματικούς αριθμούς  $\mu, \lambda$  ισχύει η σχέση  $3\mu + 2\lambda = 0$ .

**α.** Να δείξετε ότι, όλοι οι κύκλοι που ορίζονται από την εξίσωση  $x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y = 0$  για τις διάφορες τιμές των  $\mu$  και  $\lambda$ , έχουν τα κέντρα τους σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 6

**β.** Να βρείτε τα  $\mu, \lambda$  έτσι, ώστε, αν  $A, B$  είναι τα σημεία τομής του αντίστοιχου κύκλου με την ευθεία  $x + y + 2 = 0$ , να ισχύει

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0.$$

Μονάδες 6

**γ.** Για τις τιμές των  $\mu, \lambda$  που βρήκατε στο ερώτημα **β** να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AOB$ .

Μονάδες 6

**Απάντηση:**

$$\mathbf{A.} \quad x^2 + \psi^2 + 6\mu x + 8\lambda\psi = 0 \quad \text{ή}$$

$$(x^2 + 6\mu x) + (\psi^2 + 8\lambda\psi) = 0 \quad \text{ή}$$

$$(x^2 + 2 \cdot 3\mu \cdot x + 9\mu^2 - 9\mu^2) + (\psi^2 + 2 \cdot 4\lambda \cdot \psi + 16\lambda^2 - 16\lambda^2) = 0 \quad \text{ή}$$

$$(x + 3\mu)^2 - 9\mu^2 + (\psi + 4\lambda)^2 - 16\lambda^2 = 0 \quad \text{ή}$$

$$(x + 3\mu)^2 + (\psi + 4\lambda)^2 = 9\mu^2 + 16\lambda^2.$$

Επειδή  $9\mu^2 + 16\lambda^2 > 0$  για κάθε  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^*$  προκύπτει ότι είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο  $K(-3\mu, -4\lambda)$  και ακτίνα:

$$\rho = \sqrt{9\mu^2 + 16\lambda^2}.$$

Προφανώς οι συντεταγμένες του  $O(0,0)$  επαληθεύουν τη δοσμένη εξίσωση.

**B.**

**α.** Έχουμε  $K(-3\mu, -4\lambda)$  το κέντρο του κύκλου. Θέτουμε

- $-3\mu = x \Leftrightarrow \mu = -(x/3)$  και
- $-4\lambda = \psi \Leftrightarrow \lambda = -(\psi/4)$

και αντικαθιστούμε στην  $3\mu + 2\lambda = 0$ . Τότε έχουμε:

$$3\left(-\frac{x}{3}\right) + 2\left(-\frac{\psi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$-x - \frac{\psi}{2} = 0 \Leftrightarrow \psi = -2x.$$

Άρα έχουν τα κέντρα τους στην ευθεία  $\psi = -2x$ .

**β. (Α' ΛΥΣΗ)**

Επειδή

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0,$$

προκύπτει ότι

$$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \quad (1)$$

Επειδή τα  $O, A$  και  $B$  είναι σημεία του κύκλου, προκύπτει λόγω της (1) ότι η  $AB$  είναι διάμετρος του κύκλου. Επομένως η ευθεία  $(\varepsilon)$  με εξίσωση  $x + \psi + 2 = 0$  διέρχεται από το κέντρο του  $K(-3\mu, -4\lambda)$ .

$$\text{Οπότε } -3\mu - 4\lambda + 2 = 0 \quad (2)$$

$$\text{Όμως έχουμε } 3\mu + 2\lambda = 0 \quad (3)$$

Από το σύστημα των εξισώσεων (2), και (3), βρίσκουμε:

$$\lambda = 1 \text{ και } \mu = -\frac{2}{3}$$

### β. (Β' ΛΥΣΗ)

Έστω ότι είναι  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$  οι συντεταγμένες των Α, Β. Αυτές προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 + 6\mu x + 8\lambda y &= 0 \\ x + y + 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + (-x - 2)^2 + 6\mu x + 8\lambda(-x - 2) &= 0 \\ y &= -x - 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} 2x^2 + (4 + 6\mu - 8\lambda)x + (4 - 16\lambda) &= 0 \\ y &= -x - 2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} x^2 + (2 + 3\mu - 8\lambda)x + (2 - 8\lambda) &= 0 \quad (1) \\ y &= -x - 2 \end{aligned} \right\}$$

Επειδή  $3\mu + 2\lambda = 0$  η (1) γράφεται

$$x^2 + 2(1 - 3\lambda)x + (2 - 8\lambda) = 0.$$

Έτσι είναι  $x_1 + x_2 = 2(3\lambda - 1)$  και  $x_1 x_2 = 2 - 8\lambda$ . (2)

Η σχέση τώρα  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$  γράφεται

$$x_1 x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0 \text{ ή}$$

$$x_1 x_2 + (-x_1 - 2)(-x_2 - 2) = 0 \text{ ή}$$

$$x_1 x_2 + (x_1 + x_2) + 2 = 0.$$

Λόγω των σχέσεων (2) είναι:

$$2 - 8\lambda + 2(3\lambda - 1) + 2 = 0$$

άρα  $\lambda = 1$  και  $\mu = -2/3$ .

### γ. (Α' ΛΥΣΗ)

Για τις τιμές:

$$\lambda = 1 \text{ και } \mu = -\frac{2}{3}$$

Η ακτίνα του κύκλου είναι:

$$\rho = \sqrt{9\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 16 \cdot 1^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Οπότε:

$$(AB) = 2\rho = 4\sqrt{5}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(AB) \cdot d(O, AB) = \frac{1}{2} 4\sqrt{5} \cdot \frac{|0+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \\ &= \frac{1}{2} 4\sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{10} \text{ τ.μονάδες} \end{aligned}$$

### γ. (Β' ΛΥΣΗ)

Για τις τιμές

$$\lambda = 1, \mu = -\frac{2}{3}$$

Είναι  $x_1 + x_2 = 4$  και  $x_1 x_2 = -6$ .

Το εμβαδόν του τριγώνου OAB δίνεται από:

$$\begin{aligned} (OAB) &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot |x_1 y_2 - x_2 y_1| = \\ &= \frac{1}{2} |x_1(-x_1 - 2) - x_2(-x_1 - 2)| = \\ &= \frac{1}{2} |-x_1 x_2 - 2x_1 + x_1 x_2 + 2x_2| = \\ &= |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2} = \\ &= \sqrt{x_1^2 x_2^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 x_2} = \\ &= \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \\ &= \sqrt{4^2 - 4(-6)} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

### γ. (Γ' ΛΥΣΗ)

Για τις τιμές  $\lambda = 1, \mu = -2/3$ , η εξίσωση του κύκλου γίνεται:

$$x^2 + \psi^2 - 4x + 8\psi = 0$$

Οι συντεταγμένες των A, B προκύπτουν από την λύση του συστήματος:

$$\left. \begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 8\psi &= 0 \\ x + \psi + 2 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Προκύπτει:

$$(x_1, \psi_1) = (2 - \sqrt{10}, -4 + \sqrt{10})$$

$$(x_2, \psi_2) = (2 + \sqrt{10}, -4 - \sqrt{10})$$

Το εμβαδόν τώρα του τριγώνου ΟΑΒ δίνεται από:

$$E = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & \psi_1 \\ x_2 & \psi_2 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots = 2\sqrt{10} \text{ τ. μ.}$$