

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
2007

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

A.1 Αν z_1, z_2 είναι μιγαδικοί αριθμοί, να αποδειχθεί ότι:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Μονάδες 8

A.2 Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

A.3 Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Μονάδες 3

B. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Αν f συνάρτηση συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και για κάθε $x \in [a, \beta]$ ισχύει $f(x) \geq 0$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx > 0$.

Μονάδες 2

β. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ . Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

Μονάδες 2

γ. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο x_0 , τότε η σύνθεσή τους $g \circ f$ είναι συνεχής στο x_0 .

Μονάδες 2

δ. Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα Δ και a είναι ένα σημείο του Δ , τότε

$$\left(\int_a^{g(x)} f(t) dt \right)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

Μονάδες 2

ε. Αν $a > 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός

$$z = \frac{2+ai}{a+2i} \quad \text{με } a \in \mathbb{R}.$$

- α. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

Μονάδες 9

- β. Έστω z_1, z_2 οι μιγαδικοί που προκύπτουν από τον τύπο

$$z = \frac{2+ai}{a+2i}$$

για $a = 0$ και $a = 2$ αντίστοιχα.

- ι. Να βρεθεί η απόσταση των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 .

Μονάδες 8

- ii. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$(z_1)^{2\nu} = (-z_2)^\nu$$

για κάθε φυσικό αριθμό ν .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

- α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

- β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

- γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

- δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $f(0) > 0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ για την οποία ισχύει $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 1]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t)g(t)dt, \quad x \in [0, 1],$$

$$G(x) = \int_0^x g(t)dt, \quad x \in [0, 1].$$

α. Ναδειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 8

β. Να αποδειχθεί ότι:

$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$

για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$

για κάθε x στο διάστημα $(0, 1]$.

Μονάδες 4

δ. Να βρεθεί το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)g(t) dt \right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt \right)}{\left(\int_0^x g(t) dt \right) \cdot x^5}$$

Μονάδες 7

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

- A.1** Θεωρία, σελίδα 98 σχολ. βιβλίου.
A.2 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 141 σχολ. βιβλίου.
A.3 Θεωρία - Ορισμός, σελίδα 280 σχολ. βιβλίου.

B. **α.** → Λ **β.** → Λ **γ.** → Λ **δ.** → Σ **ε.** → Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α.

$$z = \frac{2+\alpha i}{\alpha+2i}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad \text{Άρα } |z| = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \frac{|2+\alpha i|}{|\alpha+2i|} = \frac{\sqrt{4+\alpha^2}}{\sqrt{\alpha^2+4}} = 1.$$

Άρα η εικόνα του μιγαδικού z ανήκει στον κύκλο με κέντρο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.

β.

Για $\alpha = 0$ έχουμε: $z_1 = \frac{2+0i}{0+2i} = \frac{1}{i} = -i = 0-i$.

Για $\alpha = 2$ έχουμε: $z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1 = 1+0i$.

i. Αν A, B οι εικόνες των z_1, z_2 αντίστοιχα, τότε η απόστασή τους είναι

$$d(A, B) = |z_1 - z_2| = |(0-i) - (1+0i)| = |-1-i| = |1+i| = \sqrt{2}.$$

ii. Είναι: $(z_1)^{2\nu} = ((z_1)^2)^\nu = ((-i)^2)^\nu = (-1)^\nu = (-z_2)^\nu$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} ως πολυωνυμική, με

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$



Οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -1$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'		+	-	+
f		↗	↘	↗

Από τον πίνακα μεταβολών της f προκύπτει ότι η f έχει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = -1$, το $f(-1) = 2\sin^2\theta > 0$ και έχει τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 1$, το $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta)$.

Επίσης είναι: $f''(x) = 6x$.

Οπότε $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	0	+
f			

Προκύπτει ότι η f έχει σημείο καμπής στο $x_3 = 0$, το $f(x_3) = -2\eta\mu^2\theta$.

β.

i. Επειδή $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$ και f γνησίως αύξουσα και

συνεχής στο $(-\infty, -1]$, προκύπτει: $f((-\infty, -1]) = (-\infty, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$

Επειδή $0 \in f((-\infty, -1])$, υπάρχει $\rho_1 \in (-\infty, -1)$ ώστε $f(\rho_1) = 0$. Η ρίζα ρ_1 είναι και μοναδική στο $(-\infty, -1]$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.

ii. Επειδή $f(-1) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta > 0$, $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$ και f γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $[-1, 1]$ προκύπτει: $f([-1, 1]) = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), 2\sigma\upsilon\nu^2\theta]$.

Επειδή $0 \in f([-1, 1])$, υπάρχει $\rho_2 \in (-1, 1)$ ώστε $f(\rho_2) = 0$. Η ρίζα ρ_2 είναι και μοναδική στο $[-1, 1]$, αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό.

iii. Επειδή $f(1) = -2(1 + \eta\mu^2\theta) < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και η f είναι γνησίως

αύξουσα και συνεχής στο $[1, +\infty)$ προκύπτει: $f([1, +\infty)) = [-2(1 + \eta\mu^2\theta), +\infty)$.

Επειδή $0 \in f([1, +\infty))$, υπάρχει $\rho_3 \in (1, +\infty)$ ώστε $f(\rho_3) = 0$. Η ρίζα ρ_3 είναι και αυτή μοναδική στο $[1, +\infty)$, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς 3 ρίζες στο \mathbb{R} .

γ. Έχουμε

$A(-1, 2\sigma\upsilon\nu^2\theta)$, $B(1, -2(1 + \eta\mu^2\theta))$, $\Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$

$A \in (\varepsilon)$ αφού:

$$2\sigma\upsilon\nu^2\theta = -2(-1) - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2(1 - \eta\mu^2\theta) = 2 - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow 2 - 2\eta\mu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta.$$

$B \in (\varepsilon)$ αφού:

$$-2(1 + \eta\mu^2\theta) = (-2) \cdot 1 - 2\eta\mu^2\theta \quad \text{ή} \quad -2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta.$$

$\Gamma \in (\varepsilon)$ αφού:

$$-2\eta\mu^2\theta = 2 \cdot 0 - 2\eta\mu^2\theta \quad \text{ή} \quad -2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta.$$

δ. Βρίσκουμε τα κοινά σημεία των C_f, ε :

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta = -2x - 2\eta\mu^2\theta \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1 \text{ ή } x = -1.$$

Επομένως το ζητούμενο εμβαδόν E του χωρίου είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_{-1}^1 |f(x) - y| dx = \int_{-1}^1 |x^3 - x| dx = \\ &= \int_{-1}^0 (x^3 - x) dx - \int_0^1 (x^3 - x) dx = \frac{1}{2} \text{ τ.μ.} \end{aligned}$$

$$(*) x^3 - x = x(x-1)(x+1).$$

$$x^3 - x > 0 \text{ για } x \in (-1, 0).$$

$$x^3 - x < 0 \text{ για } x \in (0, 1).$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Αφού f, g συνεχείς στο $[0, 1]$ η F είναι παραγωγίσιμη στο $[0, 1]$ με

$$F'(x) = f(x)g(x).$$

Όμως $g(x) > 0$ στο $[0, 1]$ από υπόθεση, ενώ αφού f γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ έχουμε: $x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) > 0$, άρα $f(x) > 0$ στο $[0, 1]$.

Συνεπώς $f(x) \cdot g(x) > 0$ στο $[0, 1]$ και επομένως $F'(x) > 0$ στο $[0, 1]$.

Οπότε F γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$.

Έτσι για $x \in (0, 1]$ είναι $x > 0 \Rightarrow F(x) > F(0) \Rightarrow F(x) > \int_0^0 f(t)g(t)dt \Rightarrow F(x) > 0$.

β. Είναι: $0 \leq t \leq x$ με $x \in (0, 1]$.

Αφού f γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ έχουμε $t \leq x \Rightarrow f(t) \leq f(x)$

οπότε $f(x) - f(t) \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

Ακόμη $g(t) > 0$ στο $(0, 1]$.

άρα και $g(t) \cdot [f(x) - f(t)] \geq 0$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και για κάθε $t \in [0, x]$.

Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $t = x$

Ακόμη η $g(t) \cdot [f(x) - f(t)]$ συνεχής στο $[0, x]$ με $x \in (0, 1]$.

$$\text{Άρα } \int_0^x g(t)[f(x)-f(t)]dt > 0 \text{ με } x \in (0, 1].$$

Επομένως για κάθε $x \in (0, 1]$ έχουμε:

$$\int_0^x g(t)f(x) dt - \int_0^x f(t)g(t) dt > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) \int_0^x g(t) dt > \int_0^x f(t)g(t) dt$$

$$\Leftrightarrow f(x)G(x) > F(x).$$

γ. Είναι για κάθε $x \in (0, 1]$ και για κάθε $t \in [0, x]$: $g(t) > 0$.

Επίσης g συνεχής στο $[0, x]$ άρα η $G(x) = \int_0^x g(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη και θετική για κάθε $x \in (0, 1]$.

Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$ που ορίζεται και παραγωγίζεται στο $(0, 1]$ με

$$\begin{aligned} H'(x) &= \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)} = \frac{f(x)g(x)G(x) - F(x)g(x)}{G^2(x)} = \\ &= \frac{g(x)(f(x)G(x) - F(x))}{G^2(x)} > 0 \text{ στο } (0, 1]. \text{ (Διότι από το ερώτημα } \beta \text{ είναι} \\ & f(x)G(x) - F(x) > 0). \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση H είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 1]$ και επομένως για $x \in (0, 1]$ έχουμε: $x \leq 1 \Rightarrow H(x) \leq H(1)$ δηλαδή $\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$.

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $K(x) = \frac{\int_0^x f(t)g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} \cdot \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) dt}{x^5}$ για κάθε $x \in (0, 1]$.

- Αφού οι F, G παραγωγίσιμες στο $[0, 1]$ είναι και συνεχείς σε αυτό άρα:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = F(0) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) = G(0) = 0$$

Συνεπώς:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t)g(t) dt}{\int_0^x g(t) dt} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x)}{G(x)}$$

$$\stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{L.H \ x \rightarrow 0^+} \frac{F'(x)}{G'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \stackrel{f \text{ συνεχής}}{\text{στο } [0,1]} = f(0). \quad (1)$$

- Η $\varphi(t) = \eta\mu(t^2)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R} και η x^2 είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} άρα η $\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt$ είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και άρα είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2) dt \right) = \int_0^0 \eta\mu(t^2) dt = 0$$

$$\text{Ακόμη } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^5 = 0$$

Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2)dt}{x^5} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^{x^2} \eta\mu(t^2)dt\right)'}{(x^5)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu(x^4) \cdot 2x}{5x^4} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{\eta\mu(x^4)}{x^4} \cdot \frac{2}{5}x \right] =$$

$$= 1 \cdot \frac{2}{5} \cdot 0 = 0 \quad (2)$$

Επομένως: $\lim_{x \rightarrow 0^+} K(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta\mu t^2 dt}{x^5} \right) \stackrel{(1)}{=} f(0) \cdot 0 = 0$