ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΕΠΑ.Λ. Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

2010

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 5

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η μέση τιμή δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

β) Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ και είναι $\ell \in \Re$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$.

γ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

δ) Ισχύει ότι: $\int_a^a f(x)\,dx = a$, για κάθε $a \in \Re$.

Μονάδες 12

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, με $g(x) \neq 0$.

β) $\left(\sqrt{x}\right)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, με $x > 0$.

γ) $(e^x)' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

δ) $(\text{συν}\, x)' = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Β.

Οι ημέρες απουσίας 50 υπαλλήλων μιας εταιρείας από την εργασία τους, τον περασμένο μήνα, φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ημέρες απουσίας x_i	**Υπάλληλοι ν_i**	**Σχετική Συχνότητα f_i %**	**Αθροιστική Συχνότητα**	**Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %**	**$x_i\,\nu_i$**
0	8				
1	10				
2					
3	10				
4	5				
5	2				
Αθροίσματα					

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 10

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή της μεταβλητής x.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε τη διάμεσο της μεταβλητής x.

Μονάδες 5

Β4. Να βρείτε το πλήθος και το ποσοστό των υπαλλήλων που απουσίασαν από 2 έως και 4 ημέρες.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-1}, & x<1\\[2ex] \sqrt{x+3}+\alpha, & x\geq 1, \quad \text{όπου} \quad \alpha\in\Re\end{cases}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

Μονάδες 7

Γ3. Να υπολογίσετε τον πραγματικό αριθμό α, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$

Μονάδες 5

Γ4. Για $\alpha=-3$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A=3f(0)+2f(6)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+\alpha x+\beta$ με $\alpha,\beta \in \Re$.

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(0,1)$, τότε:

Δ1. Να βρείτε τις τιμές των πραγματικών αριθμών α και β.

Μονάδες 8

Δ2. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Δ3. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να βρείτε τις θέσεις, το είδος και τις τιμές των τοπικών ακροτάτων της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Δ4. Για $\alpha=6$ και $\beta=1$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)\,dx$

Μονάδες 5

<u>ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ</u>

ΘΕΜΑ Α

Α1. (Θεωρία). Μία συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

και είναι πραγματικός αριθμός. Τότε συμβολίζουμε το όριο αυτό $f'(x_0)$ και το ονομάζουμε παράγωγο της f στο x_0.

Α2. **α.** Λ
β. Σ
γ. Σ
δ. Λ

Α3. **α.** $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x)=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$ με $g(x)\neq 0$.

β. $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, με $x>0$.

γ. $\left(e^x\right)'=e^x,\ x\in\Re$.

δ. $(\text{συν}\, x)'=-\text{ημ}\, x,\quad x\in\Re$.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Ημέρες απουσίας x_i	**Υπάλληλοι ν_i**	**Σχετική Συχνότητα f_i %**	**Αθροιστική Συχνότητα**	**Αθροιστική Σχετική Συχνότητα %**	**$x_i\,\nu_i$**
0	8	**16%**	**8**	**16**	**0**
1	10	**20%**	**18**	**36**	**10**
2	**15**	**30%**	**33**	**66**	**30**
3	10	**20%**	**43**	**86**	**30**
4	5	**10%**	**48**	**96**	**20**
5	2	**4%**	**50**	**100**	**10**
Αθροίσματα	**50**	**100%**			**100**

$\nu_3 = 50 - (8 + 10 + 10 + 5 + 2) = 15.$

Β2. $\bar{x}=\dfrac{\nu_1x_1+\nu_2x_2+\nu_3x_3+\nu_4x_4+\nu_5x_5+\nu_6x_6}{\nu}=\dfrac{0+10+30+30+20+10}{50}=\dfrac{100}{50}=2$.

Β3. Επειδή $\nu = 50$ είναι $\delta = \dfrac{x_{25} + x_{26}}{2} = \dfrac{2+2}{2} = 2$.

Β4. Το πλήθος των υπαλλήλων που απουσίασαν από 2 έως και 4 ημέρες είναι $\nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = 15 + 10 + 5 = 30$.
Το αντίστοιχο ποσοστό είναι 60 %.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-3}{x+1} = -1.$$

Γ2. Είναι:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (\sqrt{x+3} + a) = a + 2.$$

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ αν και μόνο αν είναι

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Από την τελευταία έχουμε: $-1 = \alpha + 2 = \alpha + 2$.

Οπότε $\alpha + 2 = -1 \Leftrightarrow \alpha = -3$.

Γ4. Για την τιμή $\alpha = -3$ έχουμε:

$$A = 3\cdot f(0) + 2f(6) = 3\frac{0^2 - 4\cdot 0 + 3}{0^2 - 1} + 2\cdot(\sqrt{6+3} - 3) = 3(-3) + 2\,(3-3) =$$
$$= -9 + 0 = -9.$$

ΘΕΜΑ Δ

Η f ως πολυωνυμική είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathfrak{R}$.

Δ1. Επειδή η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 2$ είναι $f'(2) = 0$.

Όμως $f'(x) = x^2 - 5x + \alpha$.

Οπότε $4 - 10 + \alpha = 0 \Leftrightarrow -6 + \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 6$.

Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A\,(0, 1)$ θα είναι

$f(0) = 1 \Leftrightarrow \beta = 1$.

Δ2. Για τις τιμές $\alpha = 6$ και $\beta = 1$ ο τύπος της f γράφεται:

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1 \quad \text{με} \quad f'(x) = x^2 - 5x + 6.$$

Από την εξίσωση $f'(x) = 0$ έχουμε: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$.

Βρίσκουμε $x = 2$ ή $x = 3$.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα μεταβολών

x	$-\infty$ 2	3	$+\infty$
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

Επομένως η f είναι:

- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty, 2]$.
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[2, 3]$.
- γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[3, +\infty)$.

Δ3. Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα μεταβολών έχουμε:

- στη θέση $x = 2$ τοπικό μέγιστο το $f(2) = \dfrac{17}{3}$.
- στη θέση $x = 3$ τοπικό μέγιστο το $f(3) = \dfrac{11}{2}$.

Δ4. Είναι:

$$\int_1^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3\,\mathrm{d}x - \frac{5}{2}x^2 + 6x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^2 x^3\,\mathrm{d}x - \frac{5}{2}\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x + 6\int_1^2 x\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 - \frac{5}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 + 6\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + [x]_1^2 = \frac{1}{3}\left[4 - \frac{1}{4}\right] - \frac{5}{2}\left[\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right] + 6\left[\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right] + [2-1] =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{15}{4} - \frac{5}{2}\cdot\frac{7}{3} + 6\cdot\frac{3}{2} + 1 = \frac{15}{12} - \frac{35}{6} + \frac{18}{2} + 1 = \frac{65}{12}.$$