

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**Β' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**2002**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ 1ο**

- A.** Τι ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$  .  
**Μονάδες 4**
- B.** Να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους.  
**Μονάδες 9**
- Γ.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- α.** Ένα διάνυσμα και μία ευθεία, αν έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης είναι παράλληλα.
- β.** Αν  $\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta})$  είναι η ορίζουσα των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ , τότε ισχύει η ισοδυναμία:  
$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0 .$$
- γ.** Αν  $a, \beta$  είναι θετικοί ακέραιοι, τότε πάντα ισχύει:  
 $a \cdot \beta \cdot [a, \beta] = (a, \beta)$  όπου  $[a, \beta]$  είναι το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των  $a, \beta$  και  $(a, \beta)$  είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης των  $a, \beta$ .
- δ.** Η εξίσωση  $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$  με  $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$  παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$  .  
**Μονάδες 8**
- Δ.** Στη **Στήλη Α** δίνονται εξισώσεις κωνικών τομών και στη **Στήλη Β** εξισώσεις εφαπτομένων κωνικών τομών στο σημείο επαφής  $(x_1, y_1)$ .  
Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα, τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί πάντα στη σωστή εξίσωση εφαπτομένης.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 = \rho^2$	1. $yy_1 = \rho(x + x_1)$
β. $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	2. $xx_1 + yy_1 = \rho^2$
γ. $y^2 = 2px$	3. $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$
δ. $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 1$	4. $xx_1 + yy_1 = 1$
	5. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = \rho^2$
	6. $\frac{xx_1}{\alpha^2} - \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$

**Μονάδες 4**

### ΘΕΜΑ 2ο

**A.** Να αποδείξετε ότι το γινόμενο δύο περιττών ακεραίων αριθμών είναι περιττός ακέραιος αριθμός.

**Μονάδες 5**

**B.** Να αποδείξετε ότι αν ο  $a$  είναι ακέραιος, τότε και ο  $\frac{a(a^2 + 1)}{2}$  είναι ακέραιος.

**Μονάδες 10**

**Γ.** Αν ο  $a$  είναι περιττός ακέραιος, να αποδείξετε ότι ο  $\frac{a(a^2 + 1)}{2}$  είναι επίσης περιττός ακέραιος.

**Μονάδες 10**

### ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η παραβολή  $y^2 = 4x$ . Να βρείτε:

**A.** την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής

**Μονάδες 6**

**B.** τις ευθείες που διέρχονται από την εστία της παραβολής και απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

**Μονάδες 10**

**Γ.** την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x - 1$ .

**Μονάδες 9**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνεται η εξίσωση  $x^2 + y^2 - 2x\cos\theta - 2y\sin\theta - 1 = 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

- A.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $\theta$  η εξίσωση αυτή παριστάνει κύκλο, του οποίου να προσδιορίσετε το κέντρο και την ακτίνα.

**Μονάδες 9**

- B.** Αν  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο  $M(1,2)$ .

**Μονάδες 9**

- Γ.** Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του  $\theta$  τα κέντρα των παραπάνω κύκλων βρίσκονται σε κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .

**Μονάδες 7**

## ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

### ΘΕΜΑ 1ο

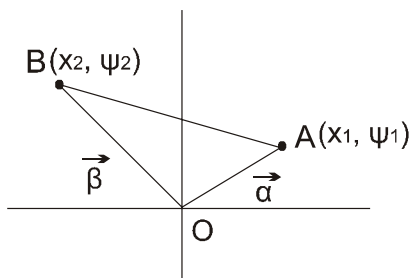
- A.** Ονομάζουμε εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  και το συμβολίζουμε με  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$  τον πραγματικό αριθμό:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \varphi$$

όπου  $\varphi$  η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

Αν  $\vec{\alpha} = \vec{0}$  ή  $\vec{\beta} = \vec{0}$  τότε ορίζουμε  $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ .

- B.** Έστω  $\vec{\alpha}(x_1, \psi_1)$  και  $\vec{\beta}(x_2, \psi_2)$ . Με αρχή το O παίρνουμε τα διανύσματα  $\vec{OA} = \vec{\alpha}$  και  $\vec{OB} = \vec{\beta}$ .



Από τον νόμο των συνημιτόνων στο τρίγωνο  $\triangle OAB$  έχουμε:

$$(AB)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2(OA)(OB)\cos\hat{AOB}$$

Όμως είναι:

$$(AB)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2$$

$$(OA)^2 = x_1^2 + \psi_1^2$$

και  $(OB)^2 = x_2^2 + \psi_2^2$

Επομένως έχουμε διαδοχικά:

$$(x_2 - x_1)^2 + (\psi_2 - \psi_1)^2 = x_1^2 + \psi_1^2 + x_2^2 + \psi_2^2 - 2(OA)(OB)\cos\hat{AOB}$$

ή μετά από πράξεις:

$$2x_1x_2 + 2\psi_1\psi_2 = +2(OA)(OB)\cos\hat{AOB}$$

και επειδή:

$$(OA)(OB)\cos(\hat{AOB}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

Προκύπτει τελικά ότι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1x_2 + \psi_1\psi_2$$

**Γ.**

α	β	γ	δ
Σ	Λ	Λ	Σ

**Δ.**

Στήλη A	Στήλη B
α	2
β	3
γ	1
δ	6

## ΘΕΜΑ 2ο

**A.** Έστω  $\alpha = 2\kappa+1$  και  $\beta = 2\lambda+1$  με  $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$  δύο περιττοί ακέραιοι αριθμοί. Τότε:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= (2\kappa+1)(2\lambda+1) = \\ &= 4\kappa\lambda+2\kappa+2\lambda+1 = \\ &= 2(2\kappa\lambda+\kappa+\lambda)+1 = \\ &= 2\rho+1\end{aligned}$$

όπου  $\rho = 2\kappa\lambda+\kappa+\lambda$  ακέραιος αριθμός.

Άρα το γινόμενο  $\alpha \cdot \beta =$  περιττός αριθμός.

**B.**

**(i)** Αν  $\alpha$  άρτιος ακέραιος αριθμός, δηλαδή  $\alpha = 2\lambda$  με  $\lambda \in \mathbb{Z}$  τότε έχουμε:

$$\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} = \frac{2\lambda(4\lambda^2+1)}{2} = \frac{2[\lambda(4\lambda^2+1)]}{2} = \lambda(4\lambda^2+1) \in \mathbb{Z}$$

**(ii)** Αν  $\alpha$  περιττός ακέραιος αριθμός, δηλαδή  $\alpha = 2\lambda+1$  με  $\lambda \in \mathbb{Z}$  τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(\alpha^2+1)}{2} &= \frac{(2\lambda+1)[(2\lambda+1)^2+1]}{2} = \\ &= \frac{(2\lambda+1)[4\lambda^2+4\lambda+1+1]}{2} = \\ &= \frac{(2\lambda+1)[4\lambda^2+4\lambda+2]}{2} = \\ &= \frac{2[(2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1)]}{2} = \\ &= (2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1) \in \mathbb{Z} \quad (1)\end{aligned}$$

**Γ.** Από το συμπέρασμα (1) του ερωτήματος Β έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}\frac{\alpha \cdot (\alpha^2+1)}{2} &= (2\lambda+1)(2\lambda^2+2\lambda+1) = \\ &= (2\lambda+1)[2(\lambda^2+\lambda)+1] = \\ &= (2\lambda+1)(2\rho+1) \quad : \text{ περιττός ακέραιος λόγω του} \\ &\text{ερωτήματος Α με } \rho = \lambda^2+\lambda \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

## ΘΕΜΑ 3ο

**A.** Η εξίσωση  $y^2 = 4x$  γράφεται  $y^2 = 2 \cdot 2 \cdot x$ , οπότε είναι  $\rho = 2$ . Έτσι η εστία  $E$  έχει συντεταγμένες  $E\left(\frac{\rho}{2}, 0\right)$  ή  $E(1,0)$ . Η διευθετούσα είναι  $x = -\frac{\rho}{2}$  ή  $x = -1$ .

**B.** Το σύνολο των ευθειών που διέρχονται από την εστία  $E(1,0)$  περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$(\eta\lambda): y - 0 = \lambda(x-1) \Leftrightarrow y = \lambda x - \lambda \Leftrightarrow \lambda x + (-1)y - \lambda = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(\epsilon): x = 1.$$

$$d(0, \epsilon) = 1 \neq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ άρα η } (\epsilon) \text{ δεν είναι λύση.}$$

Αναζητούμε έτσι  $\lambda \in \mathbb{R}$  ώστε

$$d(0, \eta_\lambda) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{|\lambda \cdot 0 + (-1) \cdot 0 - \lambda|}{\sqrt{\lambda^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 = 2(\lambda^2 + 1) \Leftrightarrow 2\lambda^2 = 2 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1.$$

Έτσι προκύπτουν δύο ευθείες:

- α) Για  $\lambda = 1$  :  $y = x - 1$ .  
 β) Για  $\lambda = -1$  :  $y = -x + 1$ .

- Γ.** Αν  $(\varepsilon')$  η ζητούμενη ευθεία και  $A(x_1, y_1)$  το σημείο επαφής της  $(\varepsilon')$  με την παραβολή, η  $(\varepsilon')$  έχει τη μορφή:

$$yy_1 = \rho(x + x_1) \text{ ή } yy_1 = 2(x + x_1).$$

Επειδή  $y_1 \neq 0$  η τελευταία γράφεται  $y = \frac{2}{y_1}x + 2\frac{x_1}{y_1}$ .

Άρα ο συντελεστής διεύθυνσης προκύπτει  $\lambda = \frac{2}{y_1}$ .

Λόγω της παραλληλίας με την  $y = x - 1$  πρέπει:

$$\lambda = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{y_1} = 1 \Leftrightarrow y_1 = 2.$$

Όμως  $A(x_1, y_1)$  είναι σημείο της παραβολής, οπότε

$$y_1^2 = 4x_1 \Leftrightarrow 2^2 = 4x_1 \Leftrightarrow x_1 = 1.$$

Τελικά η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$y \cdot 2 = 2(x + 1) \Leftrightarrow y = x + 1.$$

## ΘΕΜΑ 4ο

- A.** Η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$(x^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\theta) + (y^2 - 2y\eta\mu\theta) = 1 \text{ ή}$$

$$(x^2 - 2x\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta) + (y^2 - 2y\eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta) = 2 \text{ ή}$$

$$(x - \sigma\upsilon\nu\theta)^2 + (y - \eta\mu\theta)^2 = 2 \quad (1)$$

Η τελευταία όμως παριστάνει κύκλο με κέντρο  $K(\sigma\upsilon\nu\theta, \eta\mu\theta)$  και ακτίνα

$$\rho = \sqrt{2}.$$

- B.** Από την εξίσωση (1) για  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , προκύπτει ο κύκλος:

$$(x - 0)^2 + (y - 1)^2 = 2 \text{ του οποίου το κέντρο είναι } K(0,1).$$

Είναι:  $\lambda_{KM} = \frac{y_M - y_K}{x_M - x_K} = \frac{2-1}{1-0} = 1$ . Επειδή η εφαπτομένη ευθεία στο  $M$

είναι κάθετη στην ευθεία  $KM$ , προκύπτει ότι θα έχει συντελεστή διεύθυνσης  $\lambda = -1$  και εξίσωση:

$$y - 2 = -1(x - 1).$$

$$\text{Άρα } y = -x + 3.$$

Γ. Οι συντεταγμένες  $x, y$  των κέντρων των παραπάνω κύκλων είναι:

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta, y = \eta\mu\theta.$$

$$\text{Έτσι προκύπτει } x^2 + y^2 = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \eta\mu^2\theta \text{ ή } x^2 + y^2 = 1.$$

Άρα τα κέντρα αυτά βρίσκονται στον κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$  και ακτίνα  $\rho = 1$ .